Autre méthode :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\operatorname{Arc\,sin} x - \frac{\pi}{2}}{x-1} = \lim_{\substack{t\to \frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}} \frac{t-\frac{\pi}{2}}{\sin t - 1} = \lim_{\substack{t\to \frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}} \frac{t-\frac{\pi}{2}}{\sin^2 t - 1}(\sin t + 1)$$

$$= \lim_{\substack{t\to \frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}} \frac{t-\frac{\pi}{2}}{-\cos^2 t}(\sin t + 1) = \lim_{\substack{t\to \frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}} \frac{\frac{\pi}{2}-t}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(\sin t + 1)\,.$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{h}{\sin^2 h} \lim_{\substack{t\to \frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}} (\sin t + 1)$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{h}{\sin h}\,\frac{1}{\sin h} \times 2 = 1 \times +\infty \times 2 = +\infty$$

2) f est définie lorsque : $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1$.

Or : $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow 2(x^2-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1\,,1] \\ 2x^2 - 1 \geqslant -1 \Leftrightarrow 2x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} \cap [-1\,,1] = [-1\,,1]$. En plus, f est paire. D'où : $D_E = [0\,,1]$.

3) $\begin{cases} \alpha = \operatorname{Arc\,sin} x \\ x \in [0\,,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin\alpha \\ \alpha \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

Donc $f(x) = g(\alpha) = \operatorname{Arc\,sin}(2\sin^2\alpha - 1) = \operatorname{Arc\,sin}(-\cos 2\alpha)$

$$= -\operatorname{Arc\,sin}(\cos 2\alpha) = -\operatorname{Arc\,sin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right)$$

On sait que : $\left(\forall a \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]\right)$: $\operatorname{Arc\,sin}(\sin a) = a$.

Or : $\alpha \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 2\alpha \in [0\,,\pi] \Leftrightarrow -2\alpha \in [-\pi\,,0] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

Par conséquent : $g(\alpha) = -\operatorname{Arc\,sin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right) = -\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$.

Conclusion : $(\forall x \in [0\,,1])$: $f(x) = 2\operatorname{Arc\,sin} x - \frac{\pi}{2}$.

4) Sur D_E, il suffit donc d'étudier les variations de $f(x) = 2\operatorname{Arc\,sin} x - \frac{\pi}{2}$.

Cette fonction est dérivable sur $[0\,,1\,[$.

$(\forall x \in [0\,,1\,[)$: $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} > 0$. En plus on a :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{2\operatorname{Arcsin} x - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{x-1} = 2\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\operatorname{Arc\,sin} x - \frac{\pi}{2}}{x-1}$$

$$= 2 \times (+\infty) = +\infty \text{ (voir 1))}\,.$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 1.

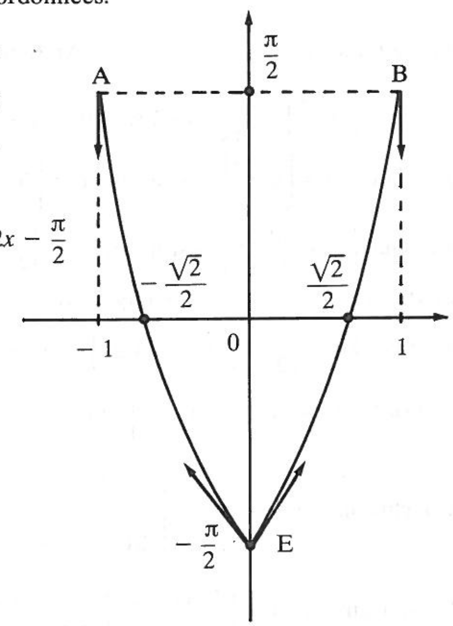
D'où :

x	0		1
$f'(x)$	2	$+$	$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$. Donc la courbe (C_f) admet à gauche du point $B\left(1\,,\frac{\pi}{2}\right)$ une demie tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

De même : $f_d'(0) = \dfrac{2}{\sqrt{1-0}} = 2$. Donc la courbe (C_f) admet à droite du point $E\left(0\,,-\frac{\pi}{2}\right)$ une demi-tangente de pente 2 et d'équation :

$y = f(0) + (x-0)f_d'(0) = -\frac{\pi}{2} + x(2) = 2x - \frac{\pi}{2}$



Points particuliers :

$x = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{2}$

$y = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On trace (C_f) sur D_E. On complète (C_f) sur D_f par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées car f est paire.

EXERCICE 12

Soit $f(x) = \operatorname{Arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}$

1) Déterminer D_f et D_E.

2) Pour $x \in D_E$, poser $\alpha = \operatorname{Arctg} x$ et simplifier $f(x)$.

3) Etudier les variations de f et la concavité de (C_f) pour $x \in D_E$.

4) Préciser la courbe (C_f) aux voisinages des points $A\left(1\,,\frac{\pi}{2}\right)$ et $B\left(1\,,-\frac{\pi}{2}\right)$.

5) Construire (C_f) sur D_E. Compléter (C_f) sur D_f.

Solutions

1) Posons $u(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$; f est définie lorsque u est définie.

Donc $D_f = D_u = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
f est impaire. Donc : $D_E = [0, +\infty[- \{1\}$.

2) $\begin{cases} \alpha = \text{Arctg}\, x \\ x \in [0, +\infty[- \{1\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{tg}\, \alpha \\ \alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[- \left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}. \end{cases}$

Donc : $f(x) = g(\alpha) = \text{Arctg}\, \dfrac{2\, \text{tg}\, \alpha}{1 - \text{tg}^2\, \alpha} = \text{Arctg}\, (\text{tg}\, 2\alpha)$.

On sait que : $\left(\forall\, \alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$: Arctg tg $\alpha = \alpha$.

Or : $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[- \left\{\dfrac{\pi}{4}\right\} \Leftrightarrow 2\alpha \in [0, \pi[- \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Lorsque $2\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ c'est-à-dire $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ alors on a : $g(\alpha) = \text{Arctg}\, (\text{tg}\, 2\alpha) = 2\alpha$.

Lorsque $2\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ c'est-à-dire $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ alors on peut écrire :
$g(\alpha) = \text{Arctg}\, (\text{tg}\, 2\alpha) = -\text{Arctg tg}\, (\pi - 2\alpha)$.

Et on a : $2\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[\Leftrightarrow -2\alpha \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \pi - 2\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Par suite : lorsque $2\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ alors $g(\alpha) = -\text{Arctg tg}\, (\pi - 2\alpha) = -(\pi - 2\alpha)$
$= 2\alpha - \pi$

Conclusion : $f(x) = g(\alpha) = \begin{cases} 2\alpha \text{ pour } \alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[\\ 2\alpha - \pi \text{ pour } \alpha \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$

C'est-à-dire : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2\, \text{Arctg}\, x \text{ pour } x \in [0, 1[\\ f_2(x) = 2\, \text{Arctg}\, x - \pi \text{ pour } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$

3) Il suffit d'étudier sur D_E, les variations de la fonction
$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2\, \text{Arctg}\, x \text{ pour } x \in [0, 1[. \\ f_2(x) = 2\, \text{Arctg}\, x - \pi \text{ pour } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$

Continuité de f :

$D_{f_1} = \mathbb{R}$; f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0, 1[$.
$D_{f_2} = \mathbb{R}$; f_2 est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]1, +\infty[$.
Donc f est continue sur $[0, +\infty[- \{1\}$.
f n'est pas continue en 1 car $1 \notin D_f$.

Dérivabilité de f :

$D_{f_1} = \mathbb{R}$; f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0, 1[$.
$D_{f_2} = \mathbb{R}$; f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]1, +\infty[$.

Donc : $f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = \dfrac{2}{1 + x^2} \text{ pour } x \in [0, 1[. \\ f_2'(x) = \dfrac{2}{1 + x^2} \text{ pour } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$

D'où : $f'(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$ pour $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Et on a donc : $f_d'(0) = \dfrac{2}{1 + 0} = 2$

Enfin, f n'est pas dérivable en 1 car $1 \notin D_f$.

Tableau de variation de f :

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f_1(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 2\, \text{Arctg}\, x = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ X > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f_2(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (2\, \text{Arctg}\, x - \pi) = 2 \times \dfrac{\pi}{4} - \pi = -\dfrac{\pi}{2}$

Donc :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	2		‖		
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{\pi}{2}$ ‖ $-\dfrac{\pi}{2}$	↗	0

Etude de la concavité de (C_f) :

$(\forall\, x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[) : f''(x) = \dfrac{-4x}{(1 + x^2)^2} < 0$

Donc :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$-$	

Donc pour $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$, la concavité de (C_f) est tournée vers les y négatifs.

4) Précision de (C_f) au point $A\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$1 \notin D_f$; mais $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f_1(x)$

Considérons donc sur $[0, 1[$ le prolongement par continuité g de f_1 à gauche en 1.
On a : $\begin{cases} g(x) = f_1(x) \text{ pour } x \in [0, 1[. \\ g(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f_1(x) = \dfrac{\pi}{2} = f_1(1). \end{cases}$

Donc $g(x) = f_1(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0, 1]$.

$(\forall\, x \in [0, 1]) : g'(x) = f_1'(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$. D'où : $g'(1) = \dfrac{2}{1 + 1} = 1$

Donc la courbe (C_g) admet à gauche du point $A\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ une demi tangente de pente 1.

Précision de (C_f) au point $B\left(1\,,\, -\frac{\pi}{2}\right)$:

$1 \notin D_f$; mais : $-\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_2(x)$

Considérons donc sur $]1\,,+\infty[$ le prolongement par continuité h de f_2 à droite en 1.

On a : $\begin{cases} h(x) = f_2(x) \text{ pour } x \in\,]1\,,+\infty[\\ h(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_2(x) = -\frac{\pi}{2} = f_2(1) \end{cases}$

Donc $h(x) = f_2(x)$ pour $x \in [1\,,+\infty[$.

h est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[1\,,+\infty[$.

$(\forall x \in [1\,,+\infty[) : h'(x) = f_2'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$. D'où : $h_d'(1) = \dfrac{2}{1+1} = 1$.

Donc la courbe (C_h) admet à droite du point $B\left(1\,,-\frac{\pi}{2}\right)$ une demi tangente de pente 1.

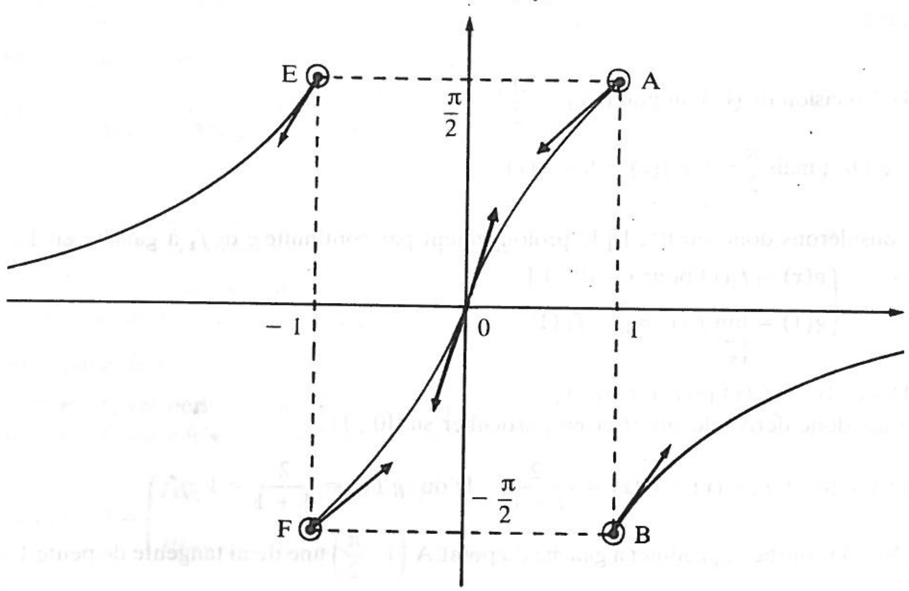
5) Soit (C_g) la courbe de g sur $[0\,,1]$.
Soit (C_h) la courbe de h sur $[1\,,+\infty[$.
Alors sur D_E, la courbe (C_f) n'est autre que l'union : $(C_g) \cup (C_h)$ privée des points : $A\left(1\,,\frac{\pi}{2}\right)$ et $B\left(1\,,-\frac{\pi}{2}\right)$.
Il suffit donc de construire (C_g) et (C_h) et d'éliminer A et B.

On a :

x	0		1
$g'(x)$	2	+	1
$g(x)$	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

x	1		$+\infty$
$h'(x)$	1	+	
$h(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0

On a complété (C_f) sur D_f par symétrie par rapport à l'origine O.
Les points A, B, E, F n'appartiennent pas à (C_f).



EXERCICE 13

Soit $f(x) = \text{Arccos}\,(2x^2 - 1)$.

1) Déterminer D_f et D_E.
2) Étudier la dérivabilité de f sur D_E.
3) Déterminer le tableau de variation de f sur D_E.
Étudier la concavité de (C_f) sur D_E.
4) Construire (C_f) sur D_E. Compléter (C_f) sur D_f.

Solutions

1) f est définie lorsque : $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1$.

Or : $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1\,,1] \\ 2x^2 - 1 \geqslant -1 \Leftrightarrow 2x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Donc $D_f = \mathbb{R} \cap [-1\,,1] = [-1\,,1]$.
D'autre part : f est paire. Par suite : $D_E = [0\,,1]$.

2) Posons $u(x) = 2x^2 - 1$. On a :

f est dérivable sur $D_E \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ est dérivable sur } D_E. \\ u(D_E) \subset\,]-1\,,1[. \end{cases}$

Or : u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur D_E.

$(\forall x \in D_E) : u'(x) = 4x$. Donc :

x	0		1
$u'(x)$		+	
$u(x)$	-1	↗	1

Donc : $u(D_E) = [-1\,,1] \not\subset\,]-1\,,1[$.
Mais : $u(]0\,,1[) =]-1\,,1[\subset]-1\,,1[$.
Par suite, f est dérivable sur $]0\;1[$.

$(\forall x \in]0\,,1[) : f'(x) = \dfrac{-4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}} < 0$

Il reste à étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en 1. On a :

$\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\text{Arccos}\,(2x^2-1) - \pi}{x}$. Posons $t = \text{Arccos}\,(2x^2 - 1)$.

On a : $\begin{cases} t = \text{Arccos}\,(2x^2-1) \\ x \in]0\,,1[\Leftrightarrow 2x^2 - 1 = u(x) \in]-1\,,1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 = \cos t \\ t \in]0\,,\pi[. \end{cases}$

Or : $2x^2 - 1 = \cos t \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1+\cos t}{2} = \cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$

Mais : $t \in \left]0\,,\pi\right[\Leftrightarrow \dfrac{t}{2} \in \left]0\,,\dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos\dfrac{t}{2} > 0$. Donc $x = \cos\dfrac{t}{2}$ car $x > 0$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{t\to\pi\\ t<\pi}} \dfrac{t-\pi}{\cos\frac{t}{2}} = \lim\limits_{\substack{t\to\pi\\ t<\pi}} \dfrac{t-\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)}$

$$= \lim_{\substack{t\to\pi\\ t<\pi}} -2\,\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)} = \lim_{h\to 0_+} -2\,\frac{h}{\sin h} = -2\times 1 = -2.$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = -2$.

De même : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{\text{Arccos}\,(2x^2-1)}{x-1} = \lim\limits_{t\to0_+} \dfrac{t}{\cos\frac{t}{2}-1}$

$$= \lim_{t\to0_+} \frac{t}{-2\sin^2\left(\frac{t}{4}\right)} = \lim_{t\to0_+} -2\,\frac{\frac{t}{4}}{\sin\frac{t}{4}}\,\frac{1}{\sin\frac{t}{4}}$$

$$= -2\times1\times+\infty = -\infty\,.$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 1.

3)

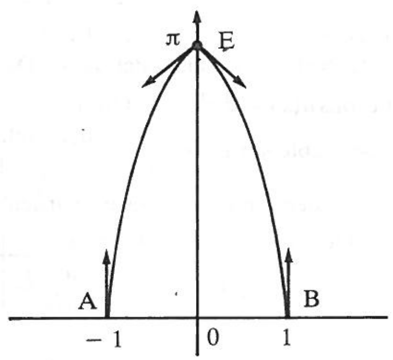
x	0		1
$f'(x)$	-2	$-$	$-\infty$
$f(x)$	π	↘	0

; $(\forall x\in\,]0\,,1\,[) : f''(x) = \dfrac{-2x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} < 0$.

Donc pour $x\in\,]0\,,1\,[$, la courbe (C_f) tourne sa concavité vers les y négatifs.

4) $f'_d(0) = -2$. Donc (C_f) admet à droite du point $E(0\,,\pi)$ une demi-tangente de pente -2 et d'équation
$y = f(0) + (x-0)f'_d(0) = \pi + x(-2) = -2x+\pi$.

De même : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$. Donc (C_f) admet à gauche du point $B(1\,,0)$ une demi-tangente parallèle à $y'y$.



EXERCICE 14

Soit $f(x) = x + \text{Arctg}\,\dfrac{1}{x}$.

1) Etudier les variations de f sur $]0\,,+\infty[$.

2) Montrer que la courbe de f admet une asymptote oblique quand x tend vers $+\infty$.

3) Préciser la courbe de f au voisinage du point $A\left(0\,,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4) Construire la courbe (C_f) pour $x\in\,]0\,,+\infty[$. Compléter (C_f) pour $x\in D_f$.

Solutions

1) $D_f = \mathbb{R}^*$; f est impaire ; $D_E = \,]0\,,+\infty[$.

$(\forall x\in\,]0\,,+\infty[) : f'(x) = 1 + \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1 + \dfrac{-1}{x^2+1} = \dfrac{x^2}{x^2+1} > 0.$

D'autre part : $\lim\limits_{x\to0_+} f(x) = 0 + \lim\limits_{u\to+\infty} \text{Arctg}\,u = \dfrac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \lim\limits_{u\to0_+} \text{Arctg}\,u = +\infty + 0 = +\infty$.

Donc :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	↗	$+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{Arctg}\,\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{u\to0_+} \text{Arctg}\,u = 0$

Donc la courbe (C_f) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une asymptote oblique d'équation $y = x$.

3) $0 \notin D_f$. Mais : $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{x\to0_+} f(x)$. Considérons donc sur $]0\,,+\infty[$ le prolongement par continuité g de f à droite en 0.

On a : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x\in\,]0\,,+\infty[\\ g(0) = \lim\limits_{x\to0_+} f(x) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{x\to0_+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0_+} \dfrac{x + \text{Arctg}\,\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to0_+} 1 + \dfrac{\text{Arctg}\,\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x}$

$$= 1 + \lim_{x\to0_+} \frac{\text{Arctg}\,\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x}$$

Posons $t = \text{Arctg}\,\dfrac{1}{x}$. On a : $\left.\begin{cases} t = \text{Arctg}\,\dfrac{1}{x} \\ x\in\,]0\,,+\infty[\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}\in\,]0\,,+\infty[\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \text{tg}\,t \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\text{tg}\,t} \\ t\in\left]0\,,\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{x\to0_+} \dfrac{\text{Arctg}\,\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim\limits_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\t<\frac{\pi}{2}}} \dfrac{t-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\text{tg}\,t}} = \lim\limits_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\t<\frac{\pi}{2}}} \dfrac{t-\frac{\pi}{2}}{\text{cotg}\,t} = \lim\limits_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\t<\frac{\pi}{2}}} \dfrac{t-\frac{\pi}{2}}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$

$$= \lim_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\t<\frac{\pi}{2}}} -\frac{\frac{\pi}{2}-t}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = \lim_{h\to0_+}\left(-\frac{h}{\text{tg}\,h}\right) = -1\,.$$

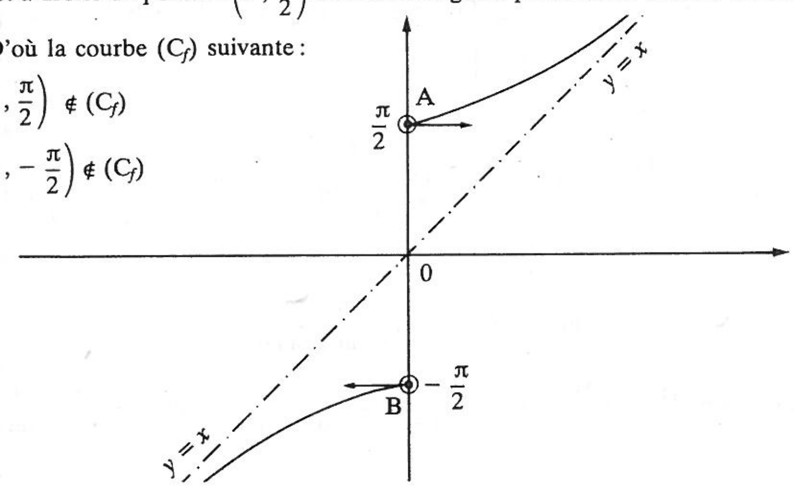
Par suite : $\lim\limits_{x\to0_+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1 - 1 = 0$.

Donc g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$. Par conséquent la courbe (C_g) admet à droite du point $A\left(0\,,\dfrac{\pi}{2}\right)$ une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

4) D'où la courbe (C_f) suivante :

$A\left(0\,,\dfrac{\pi}{2}\right) \notin (C_f)$

$B\left(0\,,-\dfrac{\pi}{2}\right) \notin (C_f)$



EXERCICE 15

Soit $f(x) = \text{Arccos}\sqrt{x-1}$ et $u(x) = \sqrt{x-1}$.

1) Déterminer D_f , et étudier les variations de $u(x) = \sqrt{x-1}$ sur D_f .

2) En posant $t = \text{Arccos}\sqrt{x-1}$, calculer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

3) Étudier les variations de f .

4) Étudier la concavité de la courbe de f . Construire (C_f) .

5) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} .
Construire $(C_{f^{-1}})$ dans un autre repère orthonormé.
Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$.

Solutions

1) f est définie lorsque : $\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ -1 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 1 \end{cases}$

Or : $\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ -1 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ 0 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ 0 \leqslant x-1 \leqslant 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1, 2] = D_f$

D'autre part : $(\forall x \in]1, +\infty[) : u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$.

Donc :

x	1		2
$u'(x)$		+	
$u(x)$	0	↗	1

2) $\begin{cases} t = \text{Arccos}\sqrt{x-1} \\ x \in [1, 2] \Leftrightarrow u(x) \in [0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \cos t \\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \cos^2 t \\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\t<\frac{\pi}{2}}} \dfrac{t-\frac{\pi}{2}}{\cos^2 t} = \lim\limits_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\t<\frac{\pi}{2}}} \dfrac{t-\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = \lim\limits_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\t<\frac{\pi}{2}}} \dfrac{t-\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}$

$= \lim\limits_{h\to0_-} \dfrac{h}{\sin^2(h)} = \lim\limits_{h\to0_-} \dfrac{h}{\sin h}\,\dfrac{1}{\sin h} = 1 \times -\infty = -\infty$

De même : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{t\to0_+} \dfrac{t}{\cos^2 t - 1} = \lim\limits_{t\to0_+} \dfrac{t}{-\sin^2 t} = \lim\limits_{t\to0_+} \left(-\dfrac{t}{\sin t}\,\dfrac{1}{\sin t}\right)$

$= -1 \times +\infty = -\infty$

3) $D_f = [1, 2]$. On a :

f est dérivable sur $]1, 2[\Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ est dérivable sur }]1, 2[\\ u(]1, 2[) \subset]-1, 1[. \end{cases}$

Or : u est dérivable sur $]1, +\infty[$ et en particulier sur $]1, 2[$.
En plus, d'après le tableau de variation de u dans la question 1),
on a : $u(]1, 2[) =]0, 1[\subset]-1, 1[$.
Par conséquent, f est dérivable sur $]1, 2[$.

$(\forall x \in]1, 2[) : f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x-1}\,\sqrt{2-x}} < 0$

En plus on a vu dans la question 2) que :
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$.

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1 et à gauche en 2.

Mais la courbe (C_f) admet à droite du point $A\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ et à gauche du point $B(2, 0)$ une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

D'où :

x	1		2
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	$-\infty$
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	↘	0

4) $(\forall x \in]1, 2[) : f''(x) = -\dfrac{1}{4}\,\dfrac{2x-3}{(x-1)(2-x)\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

Son signe est celui de $-(2x-3)$ car $(x-1)(2-x) > 0$.

D'où :

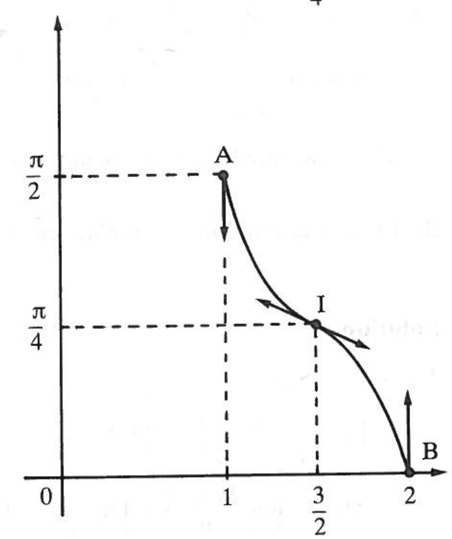
x	1		$\frac{3}{2}$		2
$f''(x)$		+	0	$-$	

$; f\left(\frac{3}{2}\right) = \text{Arccos}\sqrt{\frac{1}{2}} = \text{Arccos}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Donc (C_f) admet un seul point d'inflexion $I\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

En plus : la courbe (C_f) tourne sa concavité vers les y positifs pour $x \in \left]1, \frac{3}{2}\right[$ et vers les y négatifs pour $x \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$.

Enfin : $f'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$. Donc la courbe (C_f) admet au point d'inflexion $I\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ une tangente de pente -1 c'est-à-dire parallèle à la 2ᵉ bissectrice.



5) f est continue et strictement décroissante sur $[1\,,2]$.

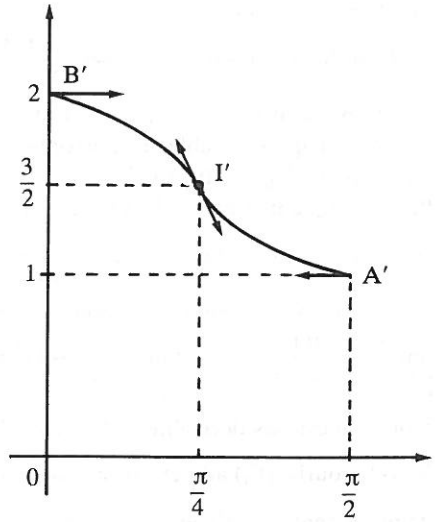
En plus : $f([1\,,2]) = \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc f admet une fonction réciproque $f^{-1}\colon \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \to [1\,,2]$.

La courbe $(C_{f^{-1}})$ se déduit de la courbe (C_f) dans une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Les symétriques de $A\left(1\,,\frac{\pi}{2}\right)$, $I\left(\frac{3}{2}\,,\frac{\pi}{4}\right)$ et $B(2\,,0)$ sont respectivement $A'\left(\frac{\pi}{2}\,,1\right)$, $I'\left(\frac{\pi}{4}\,,\frac{3}{2}\right)$ et $B'(0\,,2)$.

D'où la courbe $(C_{f^{-1}})$ suivante :



Enfin : $\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in [1\,,2] \end{cases}$

Or : $x = f(y) \Leftrightarrow x = \text{Arccos}\sqrt{y-1} \Leftrightarrow \sqrt{y-1} = \cos x$

$$\Leftrightarrow y - 1 = \cos^2 x \Leftrightarrow y = 1 + \cos^2 x = 1 + \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{3+\cos 2x}{2}$$

Conclusion : $\left(\forall x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]\right) : f^{-1}(x) = \dfrac{3+\cos 2x}{2}$

EXERCICE 16

Soit $f(x) = \text{Arctg}\sqrt{|x^2-1|}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\text{Arctg}\,u}{u}$ $\left(\text{poser } u = \text{tg}\,t \text{ avec } t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

c) En déduire les valeurs de $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)}{x-1}$.

2) Etudier et représenter graphiquement les variations de f.

Solutions

1) a) $\begin{cases} u = \text{tg}\,t \\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \text{Arctg}\,u \\ u \in \mathbb{R} \end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\text{Arctg}\,u}{u} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\text{tg}\,t} = 1.$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1-x^2}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(-\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

c) Posons $X = \sqrt{|x^2-1|}$. On a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+	

Donc $X = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} \text{ pour } x \in]-\infty\,,-1] \cup [1\,,+\infty[\\ \sqrt{1-x^2} \text{ pour } x \in [-1\,,1]. \end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\text{Arctg}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\text{Arctg}\,X}{X} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$

$= 1 \times -\infty = -\infty$

Et : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{\text{Arctg}\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\text{Arctg}\,X}{X} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

$= 1\,.(+\infty) = +\infty$

2) $D_f = \mathbb{R}$; f est paire ; donc $D_E = [0\,,+\infty[$.

f est définie sur D_E par :

$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \text{Arctg}\sqrt{1-x^2} \text{ pour } x \in [0\,,1] \\ f_2(x) = \text{Arctg}\sqrt{x^2-1} \text{ pour } x \in [1\,,+\infty[\,. \end{cases}$

$D_{f_1} = [-1\,,1]$; f_1 est dérivable sur $]-1\,,1[$ et en particulier sur $[0\,,1[$.

$D_{f_2} =]-\infty\,,-1] \cup [1\,,+\infty[$; f_2 est dérivable sur $]-\infty\,,-1[\cup]1\,,+\infty[$.

Donc : $f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = \dfrac{-x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} \text{ pour } x \in [0\,,1[\,. \\ f_2'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \text{ pour } x \in]1\,,+\infty[\end{cases}$

D'où : $f_d'(0) = f_1'(0) = 0$. Il reste à étudier la dérivabilité de f en 1.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)}{x-1} = -\infty$ (voir 1)).

Et : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)}{x-1} = +\infty$ (voir 1)).

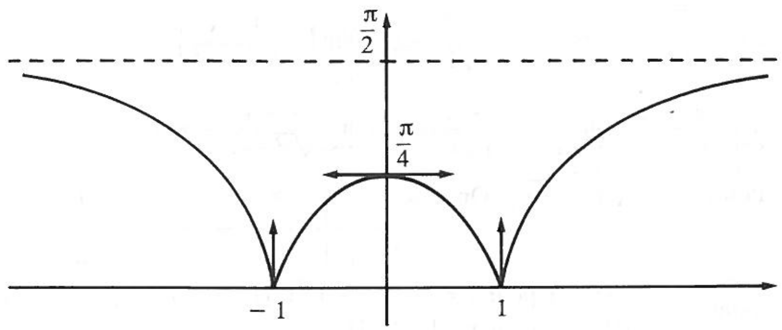
Donc f n'est pas dérivable en 1 (ni à droite ni à gauche), mais la courbe (C_f) admet à droite et à gauche du point $(1\,,0)$ une demi tangente parallèle à l'axe

Tableau de variation : $f_1'(x) < 0$; $f_2'(x) > 0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \text{Arctg}\,X = \dfrac{\pi}{2}$.

Donc :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	−	$-\infty$ ‖ $+\infty$	+	
$f(x)$	$\frac{\pi}{4}$	↘	0	↗	$\frac{\pi}{2}$



EXERCICE 17

Soit f définie par $f(x) = \text{Arctg}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

1) En posant $t = \text{Arctg}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, calculer :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-\frac{\pi}{2}}{x-1}$

2) Étudier les variations de f.

3) Préciser la courbe de f au voisinage du point $A\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4) Construire (C_f).

SOLUTIONS

1) Posons $u(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$. Donc $D_f = D_u =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$

a) $\begin{cases} t = \text{Arctg}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \\ x \in]-\infty, -1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = \text{tg}\, t \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = \text{tg}^2 t \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\text{tg}^2 t}{\text{tg}^2 t - 1} = -\dfrac{1}{\cos 2t} \\ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \end{cases}$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{t\to 0_+} \frac{t}{-\dfrac{1}{\cos 2t}+1} = \lim_{t\to 0+} \frac{t}{\cos 2t - 1}\cos 2t$$

$$= \lim_{t\to 0_+} \frac{t}{-2\sin^2 t}\cos 2t = \lim_{t\to 0_+}\left(-\frac{1}{2}\frac{t}{\sin t}\frac{\cos 2t}{\sin t}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \times 1 \times +\infty = -\infty$$

b) $\begin{cases} t = \text{Arctg}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \\ x \in]1, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = \text{tg}\, t \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1} \cdot \text{Log}\,|\cos x|. \\ t \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{f(x)-\frac{\pi}{2}}{x-1} = \lim_{\substack{t\to \frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}} \frac{t-\frac{\pi}{2}}{-\dfrac{1}{\cos 2t}-1} = \lim_{\substack{t\to \frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}} \frac{\frac{\pi}{2}-t}{1+\cos 2t}\cos 2t$$

$$= \lim_{\substack{t\to \frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}} \frac{\frac{\pi}{2}-t}{2\cos^2 t}\cos 2t = \lim_{\substack{t\to \frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{2}\frac{\frac{\pi}{2}-t}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\cos 2t$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{2}\frac{h}{\sin^2 h} \lim_{\substack{t\to \frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}} \cos 2t = \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{2}\frac{h}{\sin h}\frac{1}{\sin h} \lim_{\substack{t\to \frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}} \cos 2t$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times (+\infty) \times (-1) = -\infty$$

2) On a vu que : $D_f =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$.
u est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$; donc f aussi.

$(\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[) : f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

Son signe est celui de $u'(x)$. Mais on a :

$u'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} < 0$. Donc : $f'(x) < 0$

Il reste à étudier la dérivabilité de f à gauche en -1.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$ (voir la question 1) a)).

Donc f n'est pas dérivable à gauche en -1, mais la courbe (C_f) admet à gauche du point $B(-1, 0)$ une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Enfin : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to 1} \text{Arc tg}\, u = \dfrac{\pi}{4}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to 1} \text{Arc tg}\, u = \dfrac{\pi}{4}$

: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{u\to +\infty} \text{Arc tg}\, u = \dfrac{\pi}{2}$.

Donc :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-\infty$	(hachuré)	$-$
$f(x)$	$\frac{\pi}{4}$ ↘	0	(hachuré) $\frac{\pi}{2}$ ↘	$\frac{\pi}{4}$

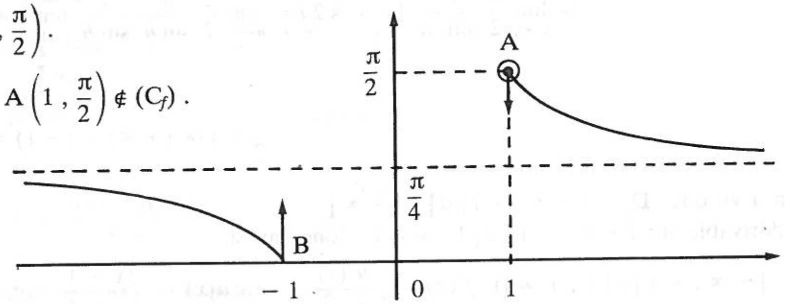
3) $1 \notin D_f$; *mais :* $\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x)$. Considérons donc le prolongement par continuité g de f à droite en 1. On a : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \in D_f \\ g(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{f(x) - \frac{\pi}{2}}{x - 1} = -\infty$ (voir la question 1) b)) .

Donc g n'est pas dérivable à droite en 1 mais la courbe (C_g) admet à droite du point $A\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ une demi tangente parallèle à l'axe des y .

4) La courbe (C_f) n'est autre que la courbe (C_g) privée du point $A\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Donc $A\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \notin (C_f)$.



Primitives et intégrales : Voir chapitre 8

EXERCICE 1

Résoudre l'équation (E) : $\text{Log} \mid \sin x \mid + \text{Log} \mid \text{tg}\, x \mid = \text{Log} \mid \cos x \mid$.

Solution

(E) exige : $\begin{cases} \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \\ \text{tg}\, x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

Donc : (E) exige : $x \neq k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Sous cette condition on a :

(E) $\Leftrightarrow \text{Log} \mid \sin x \mid + \text{Log} \mid \text{tg}\, x \mid - \text{Log} \mid \cos x \mid = 0 \Leftrightarrow \text{Log} \frac{\mid \sin x \mid \mid \text{tg}\, x \mid}{\mid \cos x \mid} = 0$

$\Leftrightarrow \text{Log} \mid \text{tg}^2 x \mid = 0 \Leftrightarrow \text{Log}\, \text{tg}^2 x = 0 \Leftrightarrow \text{tg}^2 x = 1$

$$\left.\begin{cases} \text{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{ou tg}\, x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

EXERCICE 2

Soit $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2 - \text{Log}^2 x}}$

1) Déterminer D_f.
2) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3) Déterminer le tableau de variation de f et construire (C_f).
4) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = e$ et $x = \lambda$ avec $e < \lambda < e^{\sqrt{2}}$
En déduire : $\lim\limits_{\substack{\lambda \to e^{\sqrt{2}} \\ \lambda < e^{\sqrt{2}}}} \mathcal{A}(\lambda)$.

Solutions

1) f est définie si : $x > 0$ et $2 - \text{Log}^2 x > 0$
Or : $2 - \text{Log}^2 x = 0 \Leftrightarrow \text{Log}^2 x = 2 \Leftrightarrow \text{Log}\, x = \sqrt{2}$ ou $\text{Log}\, x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = e^{\sqrt{2}}$ ou $x = e^{-\sqrt{2}}$.

D'où : $2 - \text{Log}^2 x > 0 \Leftrightarrow x \in \left] e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}} \right[$.
Par conséquent : f est définie si : $x > 0$ et $x \in \left] e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}} \right[$.
Mais $e^{-\sqrt{2}} > 0$. Donc : $D_f = \left] e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}} \right[$.

2) $(\forall x \in D_f) : f'(x) = \frac{\text{Log}^2 x + \text{Log}\, x - 2}{x^2 (2 - \text{Log}^2 x) \sqrt{2 - \text{Log}^2 x}}$.

Sur D_f, le signe de $f'(x)$ est celui de : $\text{Log}^2 x + \text{Log}\, x - 2$ qui est un trinôme du second degré en $\text{Log}\, x$. Son discriminant est $\Delta = 9$.

Ses racines sont donc telles que : $\text{Log}\, x = \frac{-1+3}{2} = 1$ ou $\text{Log}\, x = \frac{-1-3}{2} = -2$.

D'où : $\text{Log}^2 x + \text{Log}\, x - 2 = 0 \Leftrightarrow \text{Log}\, x = 1$ ou $\text{Log}\, x = -2 \Leftrightarrow x = e$ ou $x = e^{-2}$.

Donc :

x	0		e^{-2}		e		$+\infty$
$\text{Log}^2 x + \text{Log}\, x - 2$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Or : on a : $0 \quad e^{-2} \quad e^{-\sqrt{2}} \quad e \quad e^{\sqrt{2}} \quad +\infty$ car : $0 < -2 < -\sqrt{2} < 1 < \sqrt{2}$

Par conséquent, sur D_f on a :

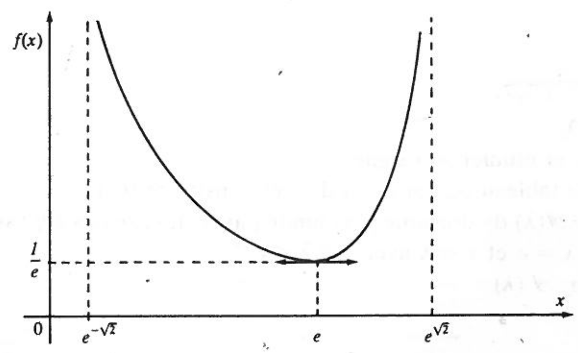
x	$e^{-\sqrt{2}}$		e		$e^{\sqrt{2}}$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖

3) Quand $\substack{x \to e^{-\sqrt{2}} \\ x > e^{-\sqrt{2}}}$, $x\sqrt{2 - \text{Log}^2 x} \to 0_+$, donc $f(x) \to +\infty$

Quand $\substack{x \to e^{\sqrt{2}} \\ x < e^{\sqrt{2}}}$, $x\sqrt{2 - \text{Log}^2 x} \to 0_+$, donc $f(x) \to +\infty$

D'où :

x	$e^{-\sqrt{2}}$		e		$e^{\sqrt{2}}$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$ ‖



4) $$\mathscr{A}(\lambda) = \int_e^{\lambda} f(x)\, dx = \int_e^{\lambda} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{2 - \text{Log}^2 x}}\, dx = \int_e^{\lambda} \frac{(\text{Log}\, x)'}{\sqrt{2\left[1 - \left(\frac{\text{Log}\, x}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}}\, dx$$

$$= \int_e^{\lambda} \frac{\left(\frac{\text{Log}\, x}{\sqrt{2}}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{\text{Log}\, x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\, dx = \left[\text{Arc sin}\, \frac{\text{Log}\, x}{\sqrt{2}}\right]_e^{\lambda}$$

$$= \text{Arc sin}\, \frac{\text{Log}\, \lambda}{\sqrt{2}} - \text{Arc sin}\, \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{Arc sin}\, \frac{\text{Log}\, \lambda}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \text{ unité d'aire.}$$

Par suite : $\lim\limits_{\substack{\lambda \to e^{\sqrt{2}} \\ \lambda < e^{\sqrt{2}}}} \mathscr{A}(\lambda) = \text{Arc sin}\, 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

PROBLÈME 1

Soit f définie par $f(x) = x^2 \sqrt{|\text{Log}\, x|}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Étudier la dérivabilité de f.

3) Déterminer le tableau de variation de f.

4) Préciser la courbe de f au voisinage de l'origine O des axes.

5) Étudier les branches infinies de la courbe de f.

6) On donne : $e^{\frac{1}{2}} \simeq 1{,}66$ et $e^{\frac{1}{4}} \simeq 1{,}3$.
Construire la courbe de f.

Solutions

1) f est définie lorsque $x > 0$ et $|\text{Log}\, x| \geqslant 0$. D'où : $D_f =]0, +\infty[$.

2) f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2\sqrt{\text{Log}\, x} \text{ si } x \in [1, +\infty[\\ f_2(x) = x^2\sqrt{-\text{Log}\, x} \text{ si } x \in]0, 1] \end{cases}$

D'une manière générale :

f_1 est définie sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$.

f_2 est définie sur $]0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

Par suite : la fonction dérivée f' de f est définie par :

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = 2x\sqrt{\text{Log}\, x} + \dfrac{x}{2\sqrt{\text{Log}\, x}} \text{ pour } x \in]1, +\infty[\\ f_2'(x) = 2x\sqrt{-\text{Log}\, x} - \dfrac{x}{2\sqrt{-\text{Log}\, x}} \text{ pour } x \in]0, 1[. \end{cases}$$

En plus : $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x^2\sqrt{-\text{Log}\, x}}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{-x^2\, \text{Log}\, x}{(x-1)\sqrt{-\text{Log}\, x}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\text{Log}\, x}{x - 1}\, \frac{-x^2}{\sqrt{-\text{Log}\, x}} = 1 \times (-\infty) = -\infty.$$

De même : $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^2\sqrt{\text{Log}\, x}}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^2\, \text{Log}\, x}{(x-1)\sqrt{\text{Log}\, x}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\text{Log}\, x}{x - 1}\, \frac{x^2}{\sqrt{\text{Log}\, x}} = 1 \times (+\infty) = +\infty.$$

Donc : f n'est pas dérivable ni à droite ni à gauche en 1, mais la courbe (C_f) de f admet au point $A\,(1, 0)$, une demi tangente à droite et une demi tangente à gauche parallèles à l'axe des ordonnées.

3) $$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} x^2\sqrt{-\text{Log}\, x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{-x^2\, \text{Log}\, x}{\sqrt{-\text{Log}\, x}}$$

$$= \lim_{x \to 0_+} \frac{1}{\sqrt{-\text{Log}\, x}}(-x)(x\, \text{Log}\, x) = 0 \times 0 \times 0 = 0$$

Ou encore : $\lim\limits_{x\to0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to0_+} x^2\sqrt{-\operatorname{Log} x} = \lim\limits_{x\to0_+}\sqrt{-x^4\operatorname{Log} x}$

$$= \lim_{x\to0_+}\sqrt{(-x)^3\,(x\operatorname{Log} x)} = \sqrt{0\times 0} = 0$$

Enfin : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,(+\infty) = +\infty$.

Signe de $f'(x)$: $f_1'(x) > 0$ car $x > 1$.

$f_2'(x) = \dfrac{4x\,(-\operatorname{Log} x) - x}{2\sqrt{-\operatorname{Log} x}} = \dfrac{-x\,(4\operatorname{Log} x + 1)}{2\sqrt{-\operatorname{Log} x}}$ du signe contraire de celui de l'expression : $4\operatorname{Log} x + 1$. D'où :

x	0		$e^{-\frac{1}{4}}$		1
$4\operatorname{Log} x + 1$		$-$	0	$+$	
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	

Donc :

x	0		$e^{-\frac{1}{4}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{1}{2e^{\frac{1}{2}}}$	↘	0	↗	$+\infty$

car $f\left(e^{-\frac{1}{4}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{4}}\right)^2\sqrt{\left|-\frac{1}{4}\right|} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2e^{\frac{1}{2}}}$

4) $0 \notin D_f$ mais $\lim\limits_{x\to0_+} f(x) = 0$. Donc on peut préciser (C_f) à droite du point 0 (0 , 0).

Considérons le prolongement par continuité g de f à droite en $x_0 = 0$.

On a : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \in D_f \\ g(0) = \lim\limits_{x\to0_+} f(x) = 0. \end{cases}$

Donc : $0 \in D_g$ et on a :

$$\lim_{x\to0_+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to0_+} x\sqrt{-\operatorname{Log} x} \quad \lim_{x\to0_+}\frac{-x\operatorname{Log} x}{\sqrt{-\operatorname{Log} x}}$$

$$= \lim_{x\to0_+}\frac{1}{\sqrt{-\operatorname{Log} x}}\,(-x\operatorname{Log} x) = 0\times 0 = 0 \text{ car } \lim_{x\to0_+} x\operatorname{Log} x = 0$$

Autre méthode :

$$\lim_{x\to0_+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to0_+} x\sqrt{-\operatorname{Log} x} = \lim_{x\to0_+}\sqrt{-x\,(x\operatorname{Log} x)} = \sqrt{-0\times 0} = 0$$

Conclusion : g est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et $g_d'(0) = 0$. Par conséquent la courbe représentative de g admet à l'origine 0 des axes une demi tangente à droite portée par l'axe des abscisses $x'x$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\operatorname{Log} x} = +\infty$

Donc : (C_f) admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées $y'y$ quand $x \to +\infty$.

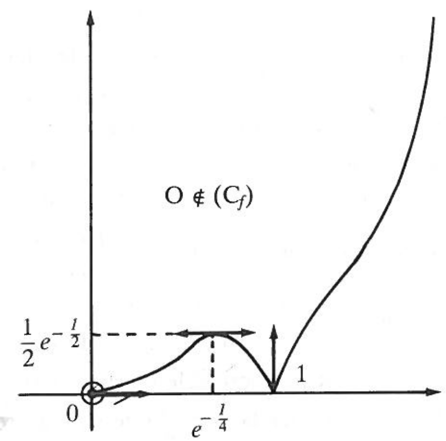
6) (C_f) n'est autre que (C_g) privée de l'origine 0 des axes. Il suffit donc de construire (C_g) et d'éliminer l'origine 0 des axes.

On a :

x	0		$e^{-\frac{1}{4}}$		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
$g(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0	↗	$+\infty$

$e^{\frac{1}{2}} \simeq 1{,}66 \Rightarrow \dfrac{1}{2e^{\frac{1}{2}}} \simeq 0{,}3$

$e^{\frac{1}{4}} \simeq 1{,}3 \Rightarrow e^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{4}}} \simeq 0{,}76$



PROBLÈME 2

Soit f définie par $f(-1) = 0$ et $f(x) = (x+1)\,|\operatorname{Log}(x+1)|$ pour $x \neq -1$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Étudier la continuité de f.

3) Étudier la dérivabilité de f.

4) Préciser les tangentes à (C_f) au point O (0 , 0) et au point A (− 1 , 0).

5) Étudier les limites éventuelles.

6) Déterminer le signe de la dérivée $f'(x)$.

7) Déterminer le tableau de variation de f.

8) Étudier les branches infinies de (C_f).

9) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Solutions

1) f est définie lorsque : $x + 1 > 0$ c'est-à-dire $x > -1$.
En plus $-1 \in D_f$ car $f(-1) = 0$. Donc : $D_f = [-1, +\infty[$.

2) $(x+1)$ et $\text{Log}(x+1)$ sont continues sur $]-1, +\infty[$.
Par suite : f est continue sur $]-1, +\infty[$.

En plus : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim\limits_{u \to 0_+} u \,|\log u\,| = \lim\limits_{u \to 0_+} (-u \log u) = 0 = f(-1)$.

Donc : f est continue à droite en -1.

Conclusion : f est continue sur son $D_f = [-1, +\infty[$.

3) Sur D_f on a : $\text{Log}(x+1) \geqslant 0 \Leftrightarrow x + 1 \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$
$\text{Log}(x+1) \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 < x + 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 < x \leqslant 0$

Donc : $|\text{Log}(x+1)| = \text{Log}(x+1)$ pour $x \in [0, +\infty[$.

Et : $|\text{Log}(x+1)| = -\text{Log}(x+1)$ pour $x \in]-1, 0]$.

Par suite : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = (x+1)\,\text{Log}(x+1) \text{ pour } x \in [0, +\infty[\\ f_2(x) = -(x+1)\,\text{Log}(x+1) \text{ pour } x \in]-1, 0] \\ f(-1) = 0. \end{cases}$

La dérivabilité de f dépend donc des dérivabilités de f_1 et f_2.
$D_{f_1} =]-1, +\infty[$; f_1 est dérivable sur $]-1, +\infty[$; donc f est dérivable sur $[0, +\infty[$, c'est-à-dire f dérivable sur $]0, +\infty[$ et dérivable à droite en 0.
De même : $D_{f_2} =]-1, +\infty[$; f_2 est dérivable sur $]-1, +\infty[$. Donc f est dérivable sur $]-1, 0]$, c'est-à-dire f dérivable sur $]-1, 0[$ et dérivable à gauche en 0.

Donc f' est définie par : $f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = 1 + \text{Log}(x+1) \text{ pour } x \in [0, +\infty[\\ f_2'(x) = -1 - \text{Log}(x+1) \text{ pour } x \in]-1, 0]. \end{cases}$

Par suite : $\begin{cases} f_d'(0) = f_1'(0) = 1 + \text{Log}\,1 = 1 \\ f_g'(0) = f_2'(0) = -1 - \text{Log}\,1 = -1 \end{cases}$

Donc f n'est pas dérivable en 0 car $f_d'(0) \neq f_g'(0)$.

Il reste à étudier la dérivabilité de f à droite en -1.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{f_2(x)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (-\text{Log}(x+1)) = \lim\limits_{u \to 0_+} (-\text{Log}\,u) = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en -1.

4) On a vu que f n'est pas dérivable en 0, mais elle est dérivable à droite et à gauche en 0. Donc (C_f) admet au point d'abscisse 0 une demi tangente à droite d'équation $y_d = f(0) + (x-0)f_d'(0) = x$, et une demi tangente à gauche d'équation $y_g = f(0) + (x-0)f_g'(0) = -x$.

Enfin on a : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = +\infty$. Donc (C_f) admet à droite du point d'abscisse -1 une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)\,\text{Log}(x+1) = \lim\limits_{u \to +\infty} u\,\text{Log}\,u = +\infty\,(+\infty) = +\infty$.

6) Pour $x \in [0, +\infty[$, on a :
$\text{Log}(x+1) \geqslant 0$, donc $f'(x) = f_1'(x) = 1 + \text{Log}(x+1) > 0$

Pour $x \in]-1, 0]$, on a :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{Log}(x+1) = -1 \Leftrightarrow x + 1 = e^{-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e} - 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f_2'(x) > 0 \Leftrightarrow \text{Log}(x+1) > -1 \Leftrightarrow 0 < x + 1 < e^{-1}$
$\Leftrightarrow -1 < x < \dfrac{1}{e} - 1.$

D'où :

x	-1		$\frac{1}{e} - 1$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-1 \,\|\|\, 1$	$+$	

7) $f\left(\dfrac{1}{e} - 1\right) = \left(\dfrac{1}{e} - 1 + 1\right)\left|\text{Log}\left(\dfrac{1}{e} - 1 + 1\right)\right| = \dfrac{1}{e}\left|\text{Log}\,\dfrac{1}{e}\right|$
$= \dfrac{1}{e}\left|-\text{Log}\,e\right| = \dfrac{1}{e}\left|\text{Log}\,e\right| = \dfrac{1}{e}$

Ou encore : $f\left(\dfrac{1}{e} - 1\right) = f_2\left(\dfrac{1}{e} - 1\right) = -\left(\dfrac{1}{e} - 1 + 1\right)\text{Log}\left(\dfrac{1}{e} - 1 + 1\right)$
$= -\dfrac{1}{e}\,\text{Log}\,\dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{e}\,\text{Log}\,e = \dfrac{1}{e}$

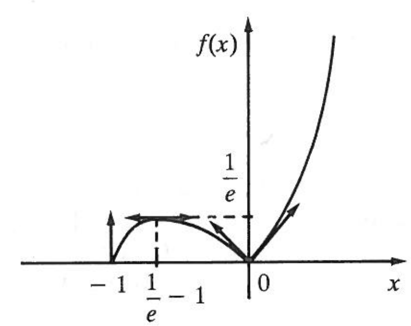
Donc :

x	-1		$\frac{1}{e} - 1$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-1 \,\|\|\, 1$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

8) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x}\,\text{Log}(x+1) = 1 \times +\infty = +\infty$

Donc (C_f) admet pour x tendant vers $+\infty$ une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

9) Voir schéma.
Le point 0 est un point anguleux.



PROBLÈME 3

Soit f définie par $f(x) = (\operatorname{Log} x)^2 + 1 - \dfrac{2}{\operatorname{Log} x}$

1) Étudier les variations de $h(x) = (\operatorname{Log} x)^3 + 1$

Calculer $h\left(\dfrac{1}{e}\right)$. En déduire le signe de $h(x)$.

2) Déterminer le domaine de définition de f.
Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.

3) Etudier les variations de f.

4) Etudier les branches infinies de $(C_f$.

5) Soit $g(x) = (\log x)^2 + 1$. Etudier $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)]$. Conclusion ?

6) Etudier la position de (C_f) par rapport à (C_g).

7) Etudier les variations de g et les branches infinies de (C_g).
Montrer que (C_g) admet un point d'inflexion I.

8) Calculer $f(e)$; Conclusion. Construire (C_g) et (C_f) dans un même repère orthonormé.

Solutions

1) $D_h =]0, +\infty[$; $(\forall x \in]0, +\infty[) : h'(x) = \dfrac{3(\operatorname{Log} x)^2}{x} \geqslant 0$.

$\lim\limits_{x \to 0+} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Donc :

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	+	0	+	
$h(x)$	‖	$-\infty$ ↗		↗	$+\infty$

Par conséquent, h est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et l'ensemble de ses valeurs est $\mathbb{R}$. Par suite, il existe x_0 unique appartenant à $]0, +\infty[$ tel que $h(x_0) = 0$.

Mais $h\left(\dfrac{1}{e}\right) = \left(\operatorname{Log}\dfrac{1}{e}\right)^3 + 1 = (-\operatorname{Log} e)^3 + 1 = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$.

D'où : $x_0 = \dfrac{1}{e}$. Le signe de $h(x)$ est donc :

x	0		$\dfrac{1}{e}$		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	+	

2) f est définie lorsque $x > 0$ et $\operatorname{Log} x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$.
D'où : $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$(\forall x \in D_f) : f'(x) = 2\,\dfrac{(\operatorname{Log} x)^3 + 1}{x(\operatorname{Log} x)^2} = \dfrac{2\,h(x)}{x(\operatorname{Log} x)^2}$ du signe de $h(x)$.

3) $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} \left((\operatorname{Log} x)^2 + 1 - \dfrac{2}{\operatorname{Log} x}\right) = +\infty + 1 - 0 = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left((\operatorname{Log} x)^2 + 1 - \dfrac{2}{\operatorname{Log} x}\right) = +\infty + 1 - 0 = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \operatorname{Log} x = 0_+$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \operatorname{Log} x = 0_-$

D'où :

x	0		$\dfrac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	+	‖	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

car $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = (-1)^2 + 1 - \dfrac{2}{-1} = 1 + 1 + 2 = 4$

4) $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = +\infty$; donc : l'axe $y'y$ est asymptote à (C_f) par valeurs positives.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$; donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C_f) par valeurs supérieures et par valeurs inférieures.

Enfin : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{(\operatorname{Log} x)^2}{x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x \operatorname{Log} x}\right)$
$= 0 + 0 - 0 = 0$

Car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\operatorname{Log} x)^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\operatorname{Log} x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2\,\dfrac{\operatorname{Log} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = (2 \times 0)^2 = 0$.

Donc : (C_f) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe $x'x$.

5) $D_g =]0, +\infty[$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{2}{\operatorname{Log} x}\right) = 0$.

Donc : (C_g) est symptote à (C_f) quand $x \to +\infty$.

6) $f(x) - g(x) = -\dfrac{2}{\operatorname{Log} x}$ du signe contraire de celui de $\operatorname{Log} x$.

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - g(x)$	‖	+	‖	$-$	

Sur $]0, 1[$, (C_f) est au dessus de (C_g).
Sur $]1, +\infty[$, (C_f) est au dessous de (C_g).
Mais (C_f) ne coupe pas (C_g) car $(\forall x \in D_f) : f(x) - g(x) \neq 0$.

7) $D_g =]0, +\infty[$; $(\forall x \in D_g) : g'(x) = 2\dfrac{\text{Log}\, x}{x}$ du signe de $\text{Log}\, x$.

$\lim\limits_{x \to 0_+} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Donc :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{(\text{Log}\, x)^2}{x} + \frac{1}{x}\right] = 0 + 0 = 0.$$

Car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\text{Log}\, x)^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2\,\dfrac{\text{Log}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = (2 \times 0)^2 = 0.$

Donc : (C_g) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe $x'x$.

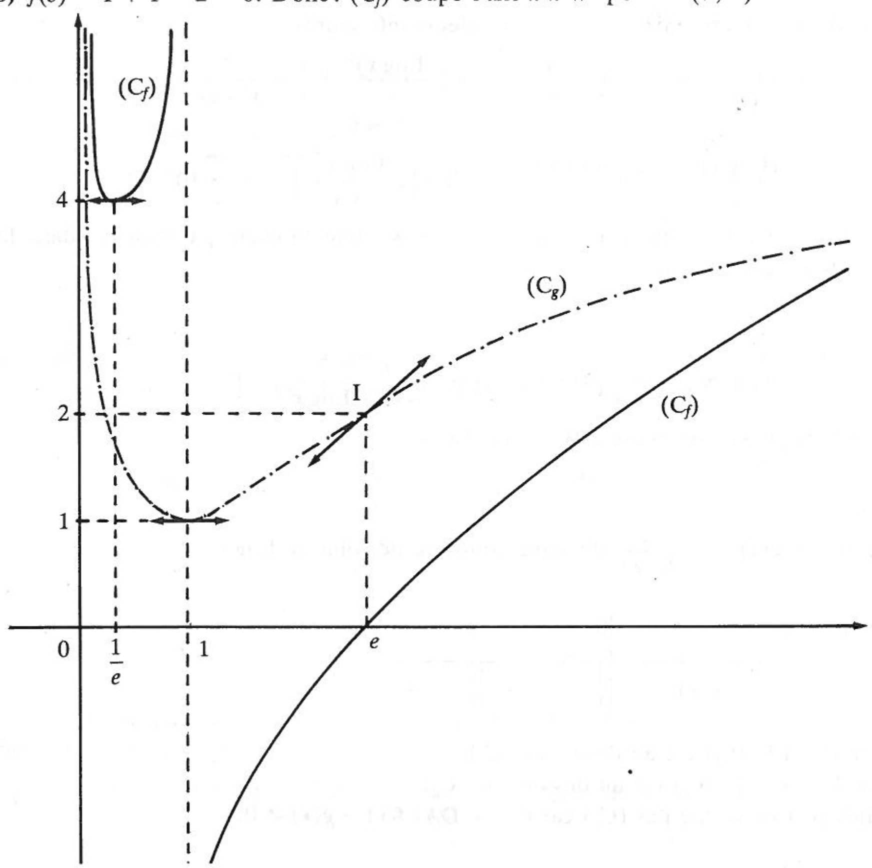
$(\forall x \in D_g) : g''(x) = 2\dfrac{1 - \text{Log}\, x}{x^2}$ du signe de $1 - \text{Log}\, x$.

Par suite :

x	0		e		$+\infty$
$g''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

; (C_g) admet donc un point d'inflexion $I(e, g(e))$ avec $g(e) = 2$.

8) $f(e) = 1 + 1 - 2 = 0$. Donc : (C_f) coupe l'axe $x'x$ au point $A(e, 0)$.



PROBLÈME 4

Soit f définie par $f(x) = \sqrt{(\text{Log}\, x)^2 - 1}$.

1) Etudier le signe de $g(x) = (\text{Log}\, x)^2 - 1$.

2) Déterminer le domaine de définition de f.

3) Calculer $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\text{Log}\, x - 1}{x - e}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}} \dfrac{\text{Log}\, x + 1}{x - \frac{1}{e}}$

4) Etudier la dérivabilité de f à droite en e.
Préciser la demi tangente à (C_f) au point $A(e, 0)$.

5) Etudier la dérivabilité de f à gauche en $\dfrac{1}{e}$.
Préciser la demi tangente à (C_f) au point $B\left(\dfrac{1}{e}, 0\right)$.

6) Déterminer le tableau de variation de f.

7) Etudier les branches infinies de (C_f).

8) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Solutions

1) $D_g =]0, +\infty[$; $(\forall x \in D_g) : g(x) = (\text{Log}\, x - 1)(\text{Log}\, x + 1)$.

On a :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$\text{Log}\, x - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\text{Log}\, x + 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

2) f est définie lorsque : $x > 0$ et $(\text{Log}\, x)^2 - 1 \geqslant 0$.

Or : $(\text{Log}\, x)^2 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]0, \frac{1}{e}] \cup [e, +\infty[$.

D'où : $D_f =]0, \frac{1}{e}] \cup [e, +\infty[$.

3) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\text{Log}\, x - 1}{x - e} = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{\text{Log}\, x - \text{Log}\, e}{x - e} = (\text{Log}\, x)'_{x=e} = \dfrac{1}{e}$

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}} \frac{\text{Log}\, x + 1}{x - \frac{1}{e}} = \lim_{x \to \frac{1}{e}} \frac{\text{Log}\, x - \text{Log}\,\frac{1}{e}}{x - \frac{1}{e}} = (\text{Log}\, x)'_{x = \frac{1}{e}} = e$$

4) $$\lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{\sqrt{(\text{Log}\, x)^2 - 1}}{\sqrt{(x - e)^2}} = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \sqrt{\frac{(\text{Log}\, x - 1)(\text{Log}\, x + 1)}{(x - e)^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \sqrt{\frac{\text{Log}\, x - 1}{x - e}\,\frac{\text{Log}\, x + 1}{x - e}} = +\infty$$

Car : $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} \dfrac{\text{Log}\, x - 1}{x - e} = \dfrac{1}{e} > 0$ (voir 3)) et $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} \dfrac{\text{Log}\, x + 1}{x - e} = +\infty$.

Autre méthode :

$$\lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{\sqrt{(\text{Log}\, x)^2 - 1}}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{(\text{Log}\, x)^2 - 1}{(x - e)\sqrt{(\text{Log}\, x)^2 - 1}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{\text{Log}\, x - 1}{x - e} \cdot \frac{\text{Log}\, x + 1}{\sqrt{(\text{Log}\, x)^2 - 1}} = \frac{1}{e} \times + \infty = + \infty$$

Conclusion : f n'est pas dérivable à droite en e, mais (C_f) admet au point A $(e\ ,\ 0)$ une demi tangente à droite parallèle à l'axe $y'y$.

5) $$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{x - \frac{1}{e}} = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} \frac{\sqrt{(\text{Log}\, x)^2 - 1}}{-\sqrt{\left(x - \frac{1}{e}\right)^2}} \quad \text{car } x - \frac{1}{e} < 0 \text{ pour } x < \frac{1}{e}.$$

$$= \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} - \sqrt{\frac{(\text{Log}\, x)^2 - 1}{\left(x - \frac{1}{e}\right)^2}} = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} - \sqrt{\frac{\text{Log}\, x - 1}{x - \frac{1}{e}} \cdot \frac{\text{Log}\, x + 1}{x - \frac{1}{e}}} = - \infty$$

car $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} \dfrac{\text{Log}\, x - 1}{x - \frac{1}{e}} = + \infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} \dfrac{\text{Log}\, x + 1}{x - \frac{1}{e}} = e$ (voir 3[e])).

Autre méthode :

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{x - \frac{1}{e}} = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} \frac{\sqrt{(\text{Log}\, x)^2 - 1}}{x - \frac{1}{e}} = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} \frac{(\text{Log}\, x)^2 - 1}{\left(x - \frac{1}{e}\right)\sqrt{(\text{Log}\, x)^2 - 1}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e}}} \frac{\text{Log}\, x + 1}{x - \frac{1}{e}} \cdot \frac{\text{Log}\, x - 1}{\sqrt{(\text{Log}\, x)^2 - 1}} = e \times (- \infty) = - \infty\ .$$

Conclusion : f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{1}{e}$, mais (C_f) admet au point B $\left(\frac{1}{e}\ ,\ 0\right)$ une demi tangente à gauche parallèle à l'axe $y'y$.

6) $\left(\forall\, x \in \left]0\ ,\ \frac{1}{e}\right[\cup \left]e\ ,\ +\infty\right[\right) : f'(x) = \dfrac{\text{Log}\, x}{x\sqrt{(\text{Log}\, x)^2 - 1}}$.

$f'(x)$ a donc le signe de $\text{Log}\, x$.

$\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = + \infty$ car $\lim\limits_{x \to 0_+} \text{Log}\, x = - \infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = + \infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log}\, x = + \infty$.

D'où :

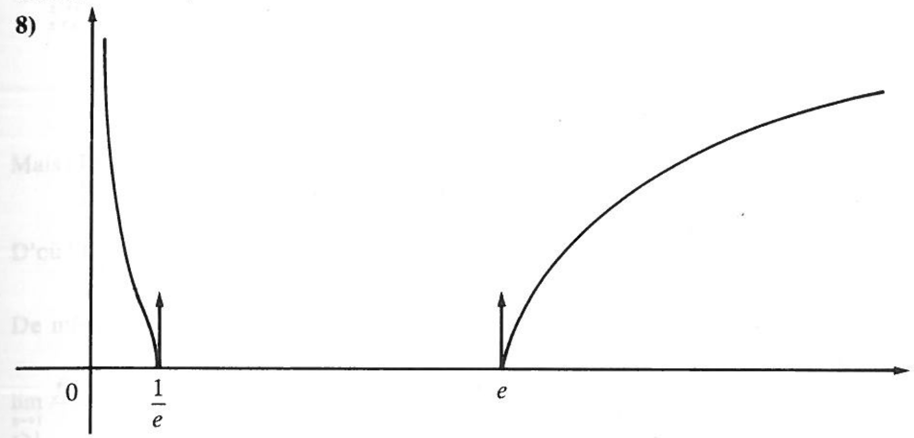
x	0		$\frac{1}{e}$		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	$-\infty$ ‖				‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0				0	↗	$+\infty$

7) $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = + \infty$; donc : l'axe $y'y$ est asymptote à (C_f) par valeurs positives.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = + \infty\ ;\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{(\text{Log}\, x)^2 - 1}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\left(\frac{\text{Log}\, x}{x}\right)^2 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Donc : (C_f) admet, pour x tendant vers $+ \infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe $x'x$.

8)



PROBLÈME 5

Soit f définie par $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \sqrt{\dfrac{\text{Log}\, x}{1 - \text{Log}\, x}} & \text{pour } x \in [1\ ,\ e\ [\ . \\ f_2(x) = \sqrt{\text{Log}\, x\,(\text{Log}\, x - 1)} & \text{pour } x \in\ ]\,0\ ,\ 1] \cup [e\ ,\ +\infty\ [\ . \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de f .

2) a) f est-elle continue en 1 ?
b) f est-elle continue en e ?

3) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.

4) f est-elle dérivable en 1 ?

5) Étudier la dérivabilité de f en e.

6) Étudier les variations de f et les branches infinies de (C_f).

7) Calculer $f(\sqrt{e})$. Conclusion. On donne $\sqrt{e} \simeq 1{,}648$. Construire (C_f).

8) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]\,0\ ,\ 1]$. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}. Construire (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ dans un même repère orthonormé.

9) Calculer le nombre dérivé de g^{-1} en $x_0 = \sqrt{2}$.

10) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$.

Solutions

1) f_1 est définie lorsque $x > 0$, $1 - \text{Log}\,x \neq 0$ et $\dfrac{\text{Log}\,x}{1 - \text{Log}\,x} \geqslant 0$.

Mais : $1 - \text{Log}\,x \neq 0 \Leftrightarrow \text{Log}\,x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq e$.

En plus on a :

x	0		1		e		$+\infty$
$\text{Log}\,x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1 - \text{Log}\,x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{\text{Log}\,x}{1 - \text{Log}\,x}$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Donc :

$\dfrac{\text{Log}\,x}{1 - \text{Log}\,x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [1\,, e\,[$.

D'où : f_1 est définie lorsque : $x > 0$, $x \neq e$ et $x \in [1\,, e\,[$

Par suite : $D_{f_1} = [1\,, e\,[$.

De même : f_2 est définie lorsque : $x > 0$ et $\text{Log}\,x\,(\text{Log}\,x - 1) \geqslant 0$

On a :

x	0		1		e		$+\infty$
$\text{Log}\,x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\text{Log}\,x - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
P	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : f_2 est définie lorsque $x > 0$ et $x \in \,]\,0\,, 1\,]\,u\,[e\,, +\infty\,[$.
Par suite : $D_{f_2} = \,]\,0\,, 1\,]\,u\,[\,e\,, +\infty\,[$.
Conclusion : $D_f = D_{f_1}\,u\,D_{f_2} = \,]\,0\,, +\infty\,[$.

2) a) f_1 est continue sur son $D_{f_1} = [\,1\,, e\,[$ et $f_1(1) = 0$
f_2 est continue sur son $D_{f_2} = \,]\,0\,, 1\,]\,u\,[\,e\,, +\infty\,[$ et $f_2(1) = 0$
Donc : f est continue en $x_0 = 1$ car $f_1(1) = f_2(1) = 0$.

b) f_2 est continue à droite en e ; par suite : f est continue à droite en e et $f(e) = f_2(e) = 0$.

Mais : $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x < e}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to e \\ x < e}} f_1(x) = +\infty$; donc : f n'est pas continue à gauche en e. Et par conséquent, f n'est pas continue en e.

3) f_1 est dérivable sur $]\,1\,, e\,[$ et f_2 est dérivable sur $]\,0\,, 1\,[u]\,e\,, +\infty\,[$.

$$\text{Donc} : f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = \dfrac{1}{x(1 - \text{Log}\,x)^2}\,\dfrac{1}{2 f_1(x)} & \text{pour } x \in \,]\,1\,, e\,[\\[2mm] f_2'(x) = \dfrac{2\,\text{Log}\,x - 1}{2x\,f_2(x)} & \text{pour } x \in \,]\,0\,, 1\,[u]\,e\,, +\infty\,[. \end{cases}$$

On a : $(\forall\, x \in \,]\,1\,, e\,[) : f'(x) > 0$.
Mais : $f_2'(x)$ a le signe de $2\,\text{Log}\,x - 1$.

En plus on a :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$2\,\text{Log}\,x - 1$	‖	$-$	0	$+$	

Donc :

x	0		1		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$f_2'(x)$	‖	$-$	‖				‖	$+$	

D'où :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	‖	$+$	

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{\sqrt{\text{Log}\,x\,(\text{Log}\,x - 1)}}{-\sqrt{(x-1)^2}}$ car $x - 1 < 0$ pour $x < 1$.

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} -\sqrt{\frac{\text{Log}\,x\,(\text{Log}\,x - 1)}{(x-1)^2}} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} -\sqrt{\frac{\text{Log}\,x}{x - 1}\,\frac{\text{Log}\,x - 1}{x - 1}}$$

Mais : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{\text{Log}\,x}{x - 1} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{\text{Log}\,x - 1}{x - 1} = +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$.

De même :

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{\sqrt{\dfrac{\text{Log}\,x}{1 - \text{Log}\,x}}}{\sqrt{(x-1)^2}}$ car $x - 1 > 0$ pour $x > 1$.

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \sqrt{\frac{\text{Log}\,x}{x - 1}\,\frac{1}{(x-1)(1 - \text{Log}\,x)}} = +\infty$$

Car : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{\text{Log}\,x}{x - 1} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{(x-1)(1 - \text{Log}\,x)} = +\infty$.

Conclusion : f n'est pas dérivable ni à droite ni à gauche en 1 ; mais la courbe (C_f) admet au point $A(1\,, 0)$ une demi tangente à droite et une demi tangente à gauche parallèles à l'axe $y'y$.

5) f n'est pas continue à gauche en e (voir 2).
Donc : f n'est pas dérivable à gauche en e.
Mais : f est continue à droite en e. On cherche donc si f est dérivable à droite en e. On a :

$$\lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \frac{\sqrt{\text{Log}\,x\,(\text{Log}\,x - 1)}}{\sqrt{(x - e)^2}} = \lim_{\substack{x \to e \\ x > e}} \sqrt{\frac{\text{Log}\,x}{x - e}\,\frac{\text{Log}\,x - 1}{x - e}} = +\infty$$

Car : $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} \dfrac{\text{Log}\,x}{x - e} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} \dfrac{\text{Log}\,x - 1}{x - e} = \lim\limits_{\substack{x \to e \\ x > e}} \dfrac{\text{Log}\,x - \text{Log}\,e}{x - e} = (\text{Log}\,x)'_{x = e} = \dfrac{1}{e}$.

Conclusion : f n'est pas aussi dérivable à droite en e, mais (C_f) admet au point $B(e\,, 0)$ une demi tangente à droite parallèle à l'axe $y'y$.

6) $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} f_2(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0_+} \text{Log}\, x = -\infty$.

Donc : la droite d'équation $x = 0$ (c'est-à-dire l'axe $y'y$) est asymptote à (C_f) par valeurs positives.

De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$. En plus :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\text{Log}\, x\,(\text{Log}\, x - 1)}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\text{Log}\, x}{x}\,\frac{\text{Log}\, x - 1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\text{Log}\, x}{x}\left(\frac{\text{Log}\, x}{x} - \frac{1}{x}\right)} = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{\text{Log}\, x}{x} = 0.$$

Donc : (C_f) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe $x'x$.

Enfin on a vu en 2) b) que : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x) = +\infty$.

Donc la droite d'équation $x = e$ est asymptote à (C_f) par valeurs inférieures.

D'où :

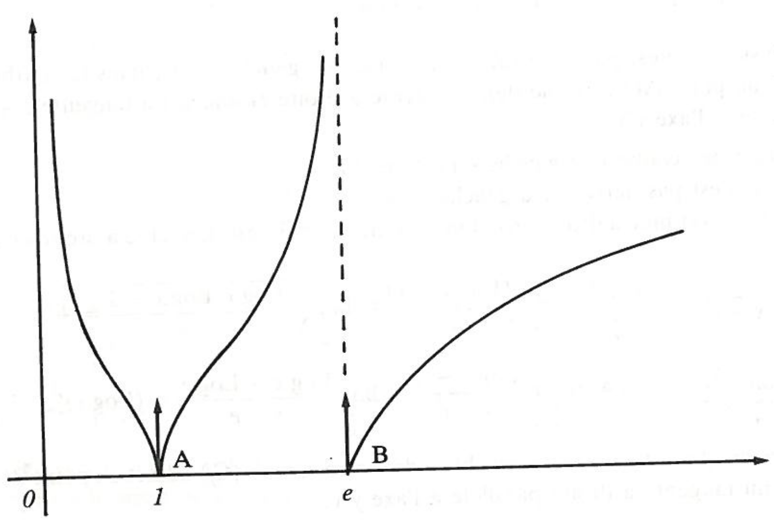
x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$ $-\infty$ ‖		$+\infty$ $+$ ‖		$+\infty$ $+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ 0	↗	$+\infty$

7) $\sqrt{e} \in]1, e[$ car $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ et $1 = e^0$

C'est-à-dire on a : $0 < \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow e^0 < e^{\frac{1}{2}} < e^1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{e} < e$.

$$\text{Donc} : f(\sqrt{e}) = f_1(\sqrt{e}) = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}} = 1$$

Par suite : (C_f) passe par le point $E(\sqrt{e}, 1)$.

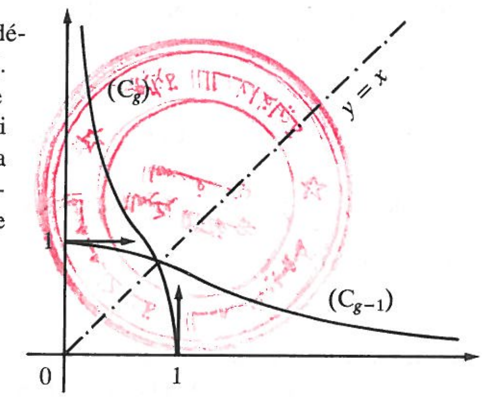


8) g n'est autre que la fonction f pour $x \in]0, 1]$.

D'après le tableau de variation de f on a donc :

x	0		1
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0

Par suite : g est continue et strictement décroissante sur $]0, 1]$ vers $[0, +\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque $g^{-1} = [0, +\infty[\to]0, 1]$ qui est aussi continue et strictement décroissante. La courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de g^{-1} se déduit de (C_g) dans une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.



9) Le nombre dérivé de g^{-1} en $x_0 = \sqrt{2}$ est : $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

Mais : $(g^{-1})'(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{g'(y)}$ avec $y = g^{-1}(\sqrt{2}) \Leftrightarrow \sqrt{2} = g(y)$ avec $y \in]0, 1]$.

Pour $y \in]0, 1]$ on a : $\sqrt{2} = g(y) \Leftrightarrow \sqrt{2} = f_2(y) = \sqrt{\text{Log}\, y\,(\text{Log}\, y - 1)} \Leftrightarrow$ $2 = \text{Log}\, y(\text{Log}\, y - 1) \Leftrightarrow (\text{Log}\, y)^2 - \text{Log}\, y - 2 = 0$. On a : $\Delta = 1 + 8 = 9$.

D'où : $\text{Log}\, y = \dfrac{1 + 3}{2} = 2 > 0$ (donc ne convient pas car $\text{Log}\, y \leqslant 0$ car $y \in]0, 1]$).

Ou $\text{Log}\, y = \dfrac{1 - 3}{2} = -1 < 0$ (donc convient car $\text{Log}\, y \leqslant 0$ car $y \in]0, 1]$).

Par suite : $\text{Log}\, y = -1 \Leftrightarrow y = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

Donc : $g'(y) = f_2'(y) = f_2'\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{-2 - 1}{2\frac{1}{e}\sqrt{2}} = \dfrac{-3e}{2\sqrt{2}}$

D'où : $(g^{-1})'(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{g'(y)} = \dfrac{-2\sqrt{2}}{3e}$.

10) $\begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in [0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) = f_2(y) = \sqrt{\text{Log}\, y(\text{Log}\, y - 1)} \\ y \in]0, 1]. \end{cases}$

Pour $x \in [0, +\infty[$ et $y \in]0, 1]$ on a :

$x = \sqrt{\text{Log}\, y\,(\text{Log}\, y - 1)} \Leftrightarrow x^2 = \text{Log}\, y\,(\text{Log}\, y - 1) \Leftrightarrow (\text{Log}\, y)^2 - \text{Log}\, y - x^2 = 0$.

$\Delta = 1 + 4x^2 > 0$. Donc :

$\text{Log}\, y = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4x^2}}{2} > 0$ (donc ne convient pas car $\text{Log}\, y \leqslant 0$ car $y \in]0, 1]$).

ou $\text{Log}\, y = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4x^2}}{2} < 0$ (donc convient car $\text{Log}\, y \leqslant 0$ car $y \in]0, 1]$).

D'où : $y = e^{\frac{1 - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}}$

Conclusion : $(\forall x \in [0, +\infty[) : g^{-1}(x) = e^{\frac{1 - \sqrt{1 + 4x^2}}{2}}$

PROBLÈME 6

Soit f définie par $f(1) = 0$ et $f(x) = \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log}|x^2 - 1|}$ pour $x \neq 1$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) a) f est-elle continue en $x_0 = 1$?

b) f est-elle dérivable en $x_0 = 1$?

3) Etudier $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4) Soit $u(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{x^2}$. Etudier les variations de u sur $]0, +\infty[$.

Calculer $u\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. En déduire le signe de $\operatorname{Log}\dfrac{|x^2-1|}{x^2}$ sur $]0, +\infty[-\{1\}$

5) Soit g définie par : $g(x) = (x^2 - 1)\operatorname{Log}|x^2 - 1| - x^2 \operatorname{Log} x^2$.

a) Etudier $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ $\left(\text{on pourra poser } h = \dfrac{1}{x^2}\right)$.

b) Etudier les variations de g sur $]0, +\infty[-\{1\}$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[-\{1\}$.

6) Etudier les variations de f.

7) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Solutions

1) f est définie lorsque : $x > 0$, $|x^2 - 1| > 0$ et $\operatorname{Log}|x^2 - 1| \neq 0$;
C'est-à-dire : $x > 0$, $x^2 - 1 \neq 0$ et $|x^2 - 1| \neq 1$.
d'où : $x > 0$, $x \neq 1$ (car $x > 0$) et $|x^2 - 1| \neq 1$
c'est-à-dire encore : $x \in]0, +\infty[-\{1\}$ et $|x^2 - 1| \neq 1$.
Pour $x \in]0, +\infty[-\{1\}$ on a :

$$|x^2 - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \text{ pour } x \in]1, +\infty[\\ x^2 - 1 = -1 \text{ pour } x \in]0, 1[. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \text{ car } x \in 1, +\infty[\\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (ne convient pas car } x \in]0, 1[). \end{cases}$$

D'où : f est définie lorsque : $x \in]0, +\infty[-\{1\}$ et $x \neq \sqrt{2}$.
Mais $1 \in D_f$ car $f(1) = 0$.
Conclusion : $D_f =]0, +\infty[-\{\sqrt{2}\}$.

2) a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\operatorname{Log}|x^2 - 1|} \operatorname{Log} x = \lim\limits_{t \to 0_+} \dfrac{1}{\operatorname{Log} t} \lim\limits_{x \to 1} \operatorname{Log} x = 0 \times 0 = 0 = f(1)$

Donc : f est continue en $x_0 = 1$.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x - 1} \dfrac{1}{\operatorname{Log}|x^2 - 1|} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x - 1} \lim\limits_{t \to 0_+} \dfrac{1}{\operatorname{Log} t} = 1 \times 0 = 0$

Donc : f est dérivable en $x_0 = 1$ et $f'(1) = 0$.

3) $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{1}{\operatorname{Log}|x^2 - 1|} \operatorname{Log} x = \lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{1}{\operatorname{Log}(1 - x^2)} \operatorname{Log} x = \lim\limits_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \dfrac{1}{\operatorname{Log} t} \lim\limits_{x \to 0_+} \operatorname{Log} x$

Mais : $\lim\limits_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \dfrac{1}{\operatorname{Log} t} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \operatorname{Log} t = 0_-$; et $\lim\limits_{x \to 0_+} \operatorname{Log} x = -\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = +\infty$.

De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log}(x^2 - 1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{2 \operatorname{Log} x + \operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\operatorname{Log} x} \operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

4) On a : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} \text{ pour } x \in [1, +\infty[\\ u(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} - 1 \text{ pour } x \in]0, 1]. \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{2}{x^3} \text{ pour } x \in [1, +\infty[\\ u'(x) = -\dfrac{2}{x^3} \text{ pour } x \in]0, 1]. \end{cases}$

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	$-2 \,\Vert\, 2$	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1

En plus : $u\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\left|\dfrac{1}{2} - 1\right|}{\dfrac{1}{2}} = 1$.

D'autre part : $\operatorname{Log}\dfrac{|x^2 - 1|}{x^2} = \operatorname{Log} u(x)$.

Pour étudier le signe de $\operatorname{Log} u(x)$, il suffit de voir si on a : $u(x) \geqslant 1$ ou $u(x) \leqslant 1$.

Or on a :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0	↗	1

Donc : Pour $x \in \left]0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ alors $u(x) > 1$, d'où : $\operatorname{Log} u(x) > 0$

Pour $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ alors $\operatorname{Log} u(x) = \operatorname{Log} 1 = 0$.

Pour $x \in \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[\cup]1, +\infty[$ on a : $0 < u(x) < 1$, d'où : $\operatorname{Log} u(x) < 0$.

D'où :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$\operatorname{Log}\frac{\lvert x^2-1\rvert}{x^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

5) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{h\to 0_+}\left[\left(\frac{1}{h} - 1\right)\text{Log}\left|\frac{1}{h} - 1\right| - \frac{1}{h}\text{Log}\frac{1}{h}\right]$

$= \lim\limits_{h\to 0_+}\left[\left(\frac{1}{h} - 1\right)\text{Log}\left|\frac{1-h}{h}\right| + \frac{\text{Log}\, h}{h}\right]$

$= \lim\limits_{h\to 0_+}\left[\left(\frac{1}{h} - 1\right)\left(\text{Log}(1-h) - \text{Log}\, h\right) + \frac{\text{Log}\, h}{h}\right]$

$= \lim\limits_{h\to 0_+}\left[\frac{\text{Log}(1-h)}{h} - \frac{\text{Log}\, h}{h} - \text{Log}(1-h) + \text{Log}\, h + \frac{\text{Log}\, h}{h}\right]$

$= \lim\limits_{h\to 0_+}\left[-\frac{\text{Log}(1-h)}{-h} - \text{Log}(1-h) + \text{Log}\, h\right] = -1 - 0 - \infty = -\infty$.

b) Le domaine de définition de g est $D_g = \mathbb{R}^* - \{-1, 1\}$.

$(\forall x \in]0, +\infty[- \{1\}) : g'(x) = 2x\,[\text{Log}\,|x^2 - 1| - \text{Log}\, x^2] = 2x\,\text{Log}\,\frac{|x^2 - 1|}{x^2}$

Par suite : $g'(x)$ a le signe de $\text{Log}\,\frac{|x^2-1|}{x^2}$ qui a été déjà étudié dans la question 4°).

D'autre part : $\lim\limits_{x\to 0_+} g(x) = (-1)(0) - 0 = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0_+} x^2\,\text{Log}\, x^2 = \lim\limits_{t\to 0_+} t\,\text{Log}\, t = 0$.

De même : $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{t\to 0} t\,\text{Log}\,|t| - \lim\limits_{x\to 1} x^2\,\text{Log}\, x^2 = 0 - 0 = 0$

D'où :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ 0	↗	$\text{Log}\, 2$	↘	0 ‖ 0	↘	$-\infty$

c) D'après le tableau de variation de g, le signe de $g(x)$ est :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	‖	$-$	

car $\text{Log}\, 2 > 0$.

6) $(\forall x \in]0, +\infty[- \{1, \sqrt{2}\}) : f'(x) = \dfrac{(x^2 - 1)\,\text{Log}\,|x^2 - 1| - x^2\,\text{Log}\, x^2}{x\,(x^2 - 1)\,(\text{Log}\,|x^2 - 1|)^2}$

Donc : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x\,(x^2 - 1)\,(\text{Log}\,|x^2 - 1|)^2}$. Son signe est celui de $\dfrac{g(x)}{x^2 - 1}$:

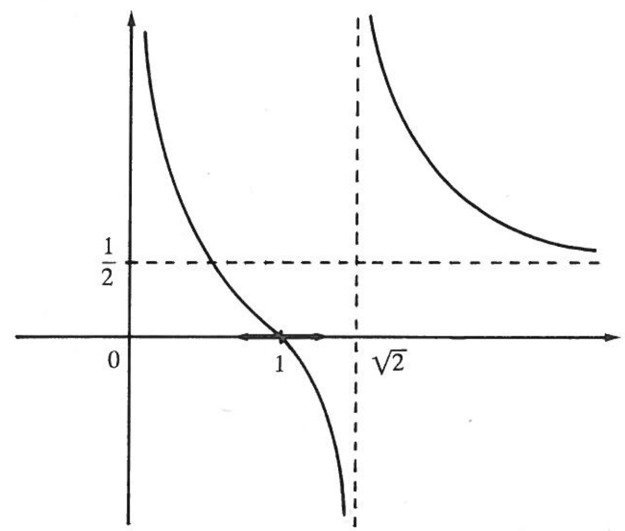
D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{2}\\ x>\sqrt{2}}} f(x) = \dfrac{\text{Log}\,\sqrt{2}}{\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \text{Log}\, t} = +\infty$ car $\text{Log}\,\sqrt{2} > 0$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \text{Log}\, t = 0_+$

De même : $\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{2}\\ x<\sqrt{2}}} f(x) = \dfrac{\text{Log}\,\sqrt{2}}{\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \text{Log}\, t} = -\infty$ car $\text{Log}\,\sqrt{2} > 0$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \text{Log}\, t = 0_-$

D'où :

x	0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	‖	$-$		$-$	
$x^2 - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

7) La courbe représentative de f est la suivante :



PROBLÈME 7

Soit f définie par : $f(0) = 0$ et :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{\text{Log}\,|x|} + x \text{ pour } x \in]-\infty, 0[\\ f_2(x) = \dfrac{1}{\text{Log}\, x} - \dfrac{1}{2\,(\text{Log}\, x)^2} \text{ pour } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

On donne : $e \simeq 2,7$; $\sqrt{2} \simeq 1,648$; $\text{Log}\, 2 \simeq 0,7$; $\text{Log}\, 3 \simeq 1,1$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) f est-elle continue en $x_0 = 0$?

3) f est-elle dérivable en $x_0 = 0$?

4) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.

5) Étudier les limites éventuelles.

6) Déterminer le tableau de variation de f.

7) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$. Conclusion ?

Étudier sur $]-\infty, 0[$, la position de (C_f) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

8) a) Résoudre sur $]0, +\infty[-\{1\}$ l'équation $f(x) = 0$. Conclusion.

b) Montrer que f s'annule en $\lambda \in \left]-2, -\frac{3}{2}\right[$

9) Construire (C_f) dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

10) Calculer $\mathcal{A}(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^e \frac{f(x)}{x}\,dx$ avec $\alpha \in]1, e[$. En déduire $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 1\\ \alpha>1}}\mathcal{A}(\alpha)$

Solutions

1) f_1 est définie lorsque : $|x| > 0$ et $\text{Log}\,|x| \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 0$ et $|x| \neq 1$

Donc : f_1 est définie sur $\mathbb{R}^* - \{-1, 1\}$ et en particulier sur $]-\infty, 0[-\{-1\} = D_1$.

f_2 est définie lorsque $x > 0$ et $\text{Log}\,x \neq 0$ c'est-à-dire $x > 0$ et $x \neq 1$.

Donc : f_2 est définie sur $]0, +\infty[-\{1\} = D_2$.

En plus : $0 \in D_f$ car $f(0) = 0$.

Conclusion : $D_f = D_1 \cup D_2 \cup \{0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} f_1(x) = 0 + 0 = 0 = f(0)$ car $\lim\limits_{x\to 0_-}\text{Log}\,|x| = \lim\limits_{t\to 0_+}\text{Log}\,t = -\infty$

De même : $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} f_2(x) = 0 - 0 = 0 = f(0)$ car $\lim\limits_{x\to 0_+}\text{Log}\,x = -\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Donc : f est continue en $x_0 = 0$.

3) $\lim\limits_{x\to 0_-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_-}\dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0_-}\left(\dfrac{1}{x\,\text{Log}\,|x|} + 1\right) = +\infty$

Car $\lim\limits_{x\to 0_-} x\,\text{Log}\,|x| = \lim\limits_{x\to 0_-} x\,\text{Log}\,(-x) = \lim\limits_{t\to 0_+} -t\,\text{Log}\,t = 0_+$

De même : $\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0_+}\left(\dfrac{1}{x\,\text{Log}\,x} - \dfrac{1}{2x\,(\text{Log}\,x)^2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{1}{x\,\text{Log}\,x}\left(1 - \dfrac{1}{2\,\text{Log}\,x}\right) = -\infty\,(1-0) = -\infty$.

Conclusion : f n'est pas dérivable ni à droite ni à gauche en $x_0 = 0$; mais la courbe (C_f) admet au point $A\,(0, 0)$ une demi tangente à droite et une demi tangente à gauche parallèle à l'axe $y'y$.

4) f_1 est dérivable sur D_1 et f_2 est dérivable sur D_2.

Donc la fonction dérivée f' de f est définie par :

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = \dfrac{-1}{x\,(\text{Log}\,|x|)^2} + 1 \text{ pour } x \in]-\infty, 0[-\{-1\} = D_1 \\[2mm] f_2'(x) = \dfrac{1-\text{Log}\,x}{x\,(\text{Log}\,x)^3} \text{ pour } x \in]0, +\infty[-\{1\} = D_2. \end{cases}$$

$(\forall x \in D_1) : f_1'(x) > 0$ car $\dfrac{-1}{x\,(\text{Log}\,|x|)^2} > 0$ puisque $x < 0$.

Mais : $f_2'(x)$ a le signe de $\dfrac{1-\text{Log}\,x}{\text{Log}\,x}$

D'où on a :

x	0		1		e		$+\infty$
$1-\text{Log}\,x$	‖	+		+	0	−	
$\text{Log}\,x$	‖	−	0	+		+	
$f_2'(x)$	‖	−	‖	+	0	−	

Conclusion : Le signe de $f'(x)$ est donc :

x	$-\infty$		-1			0			1		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	$+\infty$	‖	$-\infty$	−	‖	+	0	−	

5) $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. On cherche donc les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 0 + (-\infty) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{Log}\,|x| = \lim\limits_{t\to+\infty}\text{Log}\,t = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f_1(x) = \dfrac{1}{\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\text{Log}\,t} - 1 = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\text{Log}\,t = 0_-$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f_1(x) = \dfrac{1}{\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}}\text{Log}\,t} - 1 = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}}\text{Log}\,t = 0_+$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(\text{Log}\,x)^2}\left(\text{Log}\,x - \dfrac{1}{2}\right) = +\infty\left(0 - \dfrac{1}{2}\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to 1}(\text{Log}\,x)^2 = 0_+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 0 - 0 = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Log}\,x = +\infty$.

6)

x	$-\infty$		-1			0			1		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	$+\infty$	‖	$-\infty$	−	‖	+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		0	↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

car $f(e) = f_2(e) = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}[f_1(x)-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\text{Log}\,|x|} = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\text{Log}\,t} = 0.$

Conclusion : la droite d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) quand x tend vers $-\infty$

D'autre part : $(\forall\, x \in\,]-\infty\,,0[\, - \{-1\}) : f(x) - x = \dfrac{1}{\text{Log}\,|x|}$ du signe de $\text{Log}\,|x|$.

Mais on a :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\text{Log}\,\lvert x\rvert$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Par suite :

x	$-\infty$		-1		0
$f(x)-x$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$

Sur $]-\infty\,,-1[$, (C_f) est donc au dessus de (Δ).

Et sur $]-1\,,0[$, (C_f) est au dessous de (Δ).

8) a) Pour $x \in\,]0\,,+\infty[\, - \{1\}$ on a :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f_2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\,\text{Log}\,x - 1}{2\,(\text{Log}\,x)^2} = 0 \Leftrightarrow 2\,\text{Log}\,x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Log}\,x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Donc : sur $]0\,,+\infty[\, - \{1\}$, (C_f) coupe l'axe $x'x$ en un seul point d'abscisse $\sqrt{e}$.

b) D'après le tableau de variation de f, on voit que f est continue et strictement croissante sur $\left[-2\,,-\frac{3}{2}\right]$. En plus on a :

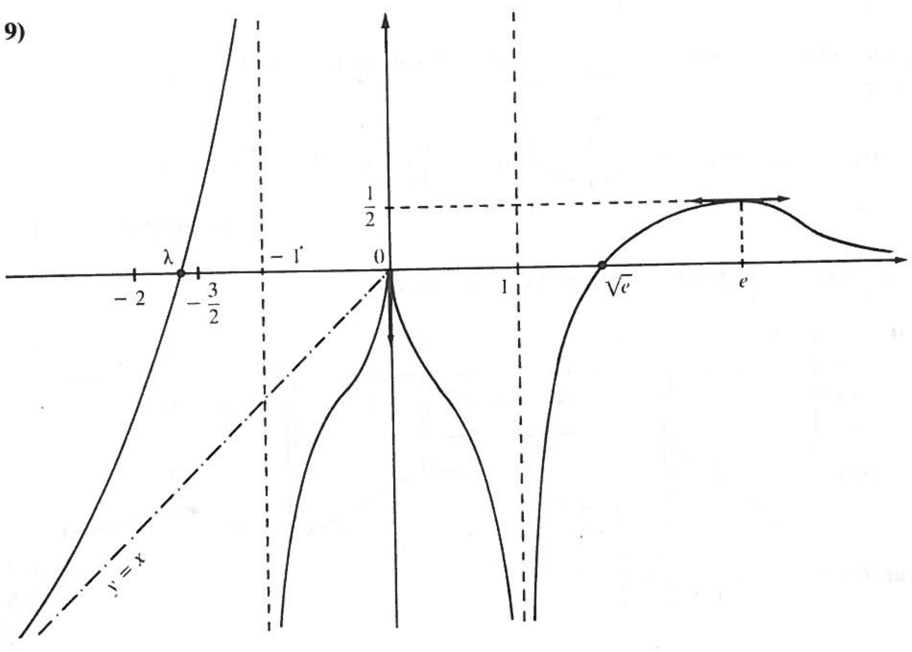
$$f(-2) = f_1(-2) = \frac{1}{\text{Log}\,2} - 2 \simeq \frac{1}{0{,}7} - 2 \simeq 1{,}4 - 2 = -0{,}6 < 0$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = f_1\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\text{Log}\,\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} = \frac{1}{\text{Log}\,3 - \text{Log}\,2} - \frac{3}{2} \simeq \frac{1}{1{,}1 - 0{,}7} - 1{,}5$$

$$\simeq 2{,}5 - 1{,}5 = 1 > 0.$$

Ces 3 résultats impliquent qu'il existe λ unique $\in \left]-2\,,-\frac{3}{2}\right[$ tel que : $f(\lambda) = 0$

9)



10) $[\alpha\,,e] \subset\,]1\,,+\infty[$. Donc :

$$\mathscr{A}(\alpha) = \int_\alpha^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_\alpha^e \frac{f_2(x)}{x}\,dx = \int_\alpha^e \left(\frac{1}{x\,\text{Log}\,x} - \frac{1}{2x\,(\text{Log}\,x)^2}\right)dx$$

$$= \int_\alpha^e \left(\frac{(\text{Log}\,x)'}{\text{Log}\,x} - \frac{1}{2}\,\frac{(\text{Log}\,x)'}{(\text{Log}\,x)^2}\right)dx$$

$$= \left[\text{Log Log}\,x + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\text{Log}\,x}\right]_\alpha^e = \frac{1}{2} - \text{Log Log}\,\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\text{Log}\,\alpha}$$

Donc : $\lim\limits_{\substack{\alpha\to1\\ \alpha>1}}\mathscr{A}(\alpha) = \dfrac{1}{2} - \lim\limits_{\substack{\alpha\to1\\ \alpha>1}}\dfrac{1}{\text{Log}\,\alpha}\left(\text{Log}\,\alpha\ \text{Log Log}\,\alpha + \dfrac{1}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2} - \lim_{\substack{\alpha\to1\\ \alpha>1}}\frac{1}{\text{Log}\,\alpha}\ \lim_{t\to0_+}\left(t\,\text{Log}\,t + \frac{1}{2}\right)\ \text{avec}\ t = \text{Log}\,\alpha$$

$$= \frac{1}{2} - (+\infty)\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - (+\infty)\left(+\frac{1}{2}\right) = -\infty.$$

PROBLÈME 8

Soit $f(x) = \text{Log}\,(x + \sqrt{x^2 + 4})$.

1) Déterminer D_f.

2) Étudier les variations de f.

3) Montrer que (C_f) admet un centre de symétrie A $(0\,,\text{Log}\,2)$.

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Conclusion ?

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Conclusion ?

5) Soit $g(x) = \text{Log}\,2x$ et $h(x) = \text{Log}\left(-\dfrac{2}{x}\right)$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)]$. Conclusion ?

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - h(x)]$. Conclusion ?

6) Étudier les variations de g et les branches infinies de (C_g).

7) Étudier les variations de h et les branches infinies de (C_h).

8) Résoudre les équations : $f(x) = 0$; $g(x) = 0$; $h(x) = 0$; et interpréter géométriquement le résultat de chaque équation.

9) Construire (C_g), (C_h) et (C_f) dans un même repère orthonormé.

10) Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ avec $\lambda > 0$.

11) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, et déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$.

Solutions

1) f est définie lorsque : $x + \sqrt{x^2+4} > 0$.

Or : $\sqrt{x^2+4}$ est définie pour tout x réel. Et $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{x^2+4} > 0$.

Donc pour : $x \geqslant 0$ on a : $x + \sqrt{x^2+4} > 0$

Et : pour $x < 0$ on a : $x + \sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2+4} + x = \dfrac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}-x} = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} > 0$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x + \sqrt{x^2+4} > 0$. D'où : $D_f = \mathbb{R}$.

2) $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} > 0$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Et : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \text{Log}\,(\sqrt{x^2+4}+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \text{Log}\,\dfrac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}-x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \text{Log}\,\frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} = \lim_{t\to 0_+} \text{Log}\, t = -\infty .$$

Par suite :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) On a : $f(0) = \text{Log}\,2$. Donc le point A $(0, \log 2)$ est un point de la courbe de f. Montrons que ce point est un centre de symétrie pour (C_f).

Posons : $\begin{cases} X = x - 0 \\ Y = y - \text{Log}\,2 \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} x = X \\ y = Y + \text{Log}\,2 \end{cases}$

Donc : $y = f(x) \Leftrightarrow Y + \text{Log}\,2 = f(X) = \text{Log}\,(X + \sqrt{X^2+4})$.

$$\Leftrightarrow Y = \text{Log}\,(X + \sqrt{X^2+4}) - \text{Log}\,2 = \text{Log}\,\frac{X+\sqrt{X^2+4}}{2} = F(X).$$

$D_F = \mathbb{R}$; donc : $(\forall X \in \mathbb{R})$, $-X \in \mathbb{R}$ et on a :

$$F(-X) + F(X) = \text{Log}\,\frac{-X+\sqrt{X^2+4}}{2} + \text{Log}\,\frac{X+\sqrt{X^2+4}}{2}$$
$$= \text{Log}\,\frac{X^2+4-X^2}{4} = \text{Log}\,1 = 0.$$

c'est-à-dire : $F(-X) = -F(X)$. Par suite, le point $A(0, \text{Log}\,2)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_f).

4) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{Log}\,(x+\sqrt{x^2+4})}{x+\sqrt{x^2+4}} \cdot \dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{x}$

$$= \lim_{u\to+\infty} \frac{\text{Log}\,u}{u} \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right) = 0 \times 2 = 0.$$

Ou encore : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{Log}\,x\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\text{Log}\,x}{x} + \frac{\text{Log}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)}{x}\right] = 0 + 0 = 0.$$

Conclusion : la courbe (C_f) admet donc pour x tendant vers $+\infty$ une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}\,\text{Log}\,(\sqrt{x^2+4}+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}\,\text{Log}\,\dfrac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}-x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\,\text{Log}\,\frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\left[\text{Log}\,4 - \text{Log}\,(\sqrt{x^2+4}-x)\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\text{Log}\,4}{x} - \frac{\text{Log}\,(\sqrt{x^2+4}-x)}{\sqrt{x^2+4}-x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{x}\right]$$
$$= 0 - \lim_{t\to+\infty} \frac{\text{Log}\,t}{t} \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} - 1\right) = 0 - 0 \times (-2) = 0$$

Ou encore :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}\,\text{Log}\,\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}$ (même méthode que précédemment)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\,\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{4} \lim_{u\to 0_+} u\,\text{Log}\,u \left(\text{avec } u = \frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-1}{4} \lim_{u\to 0_+} u\,\text{Log}\,u = -\frac{1}{2} \times 0 = 0.$$

Conclusion : La courbe (C_f) admet encore pour x tendant vers $-\infty$ une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

5) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log}\,\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log}\,\dfrac{1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{2} = \text{Log}\,1 = 0.$

Donc, pour x tendant vers $+\infty$, (C_f) est asymptote à (C_g).

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - h(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\text{Log}\,\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} - \text{Log}\left(-\dfrac{2}{x}\right)\right]$

$$= \lim_{x\to-\infty} \text{Log}\,\frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}\left(-\frac{x}{2}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \text{Log}\,\frac{-2}{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-1} = \text{Log}\,1 = 0.$$

Donc, pour x tendant vers $-\infty$, (C_f) est asymptote à (C_h).

6) $D_g = \,]0, +\infty[$; $(\forall x \in D_g) : g'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.

$\lim\limits_{x\to 0_+} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

D'où :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖ +	
$g(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{Log}\,2x}{2x} \times 2 = 0 \times 2 = 0$. Donc (C_g) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

7) $D_h =]-\infty, 0[$; $(\forall x \in D_h) : h(x) = \text{Log } 2 - \text{Log }(-x)$.

Donc : $(\forall x \in D_h) : h'(x) = -\dfrac{1}{x} > 0$.

En plus : $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \text{Log } 2 - (+\infty) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0_-} h(x) = \text{Log } 2 - (-\infty) = +\infty$

D'où :

x	$-\infty$ 0
$h'(x)$	+
$h(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

Enfin : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\text{Log } 2}{x} + \dfrac{\text{Log }(-x)}{-x} = 0 + 0 = 0$

Donc (C_h) admet, pour x tendant vers $-\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

8) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+4} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x > 0 \\ x^2 + 4 = (1-x)^2 \end{cases}$

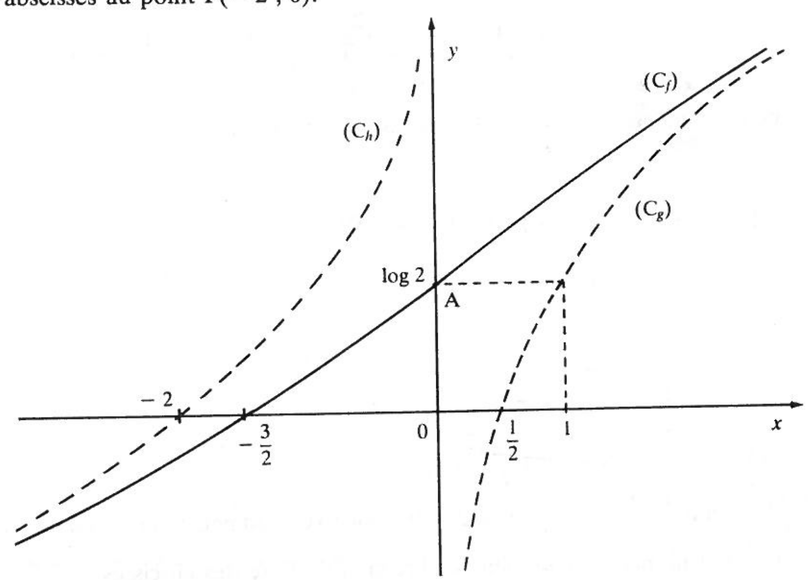
$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x = -\dfrac{3}{2} \left(\text{convient car } -\dfrac{3}{2} < 1\right). \end{cases}$

Donc (C_f) coupe l'axe des abscisses au point $B\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

De même : $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Donc (C_g) coupe l'axe des abscisses au point $E\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Enfin : $h(x) = 0 \Leftrightarrow \text{Log } 2 = \text{Log }(-x) \Leftrightarrow 2 = -x \Leftrightarrow x = -2$. Donc (C_h) coupe l'axe des abscisses au point $F(-2, 0)$.

9)



10) $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda f(x)\,dx = \int_0^\lambda \text{Log }(x + \sqrt{x^2+4})\,dx$.

Posons : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \text{Log }(x + \sqrt{x^2+4}) = f(x) \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = x \\ v' = f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} \end{cases}$

D'où : $\mathscr{A}(\lambda) = \Big[x \text{ Log }(x + \sqrt{x^2+4})\Big]_0^\lambda - \displaystyle\int_0^\lambda \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

$= \lambda \text{ Log }(\lambda + \sqrt{\lambda^2+4}) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\lambda \frac{(x^2+4)'}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

$= \lambda \text{ Log }(\lambda + \sqrt{\lambda^2+4}) - \Big[\sqrt{x^2+4}\Big]_0^\lambda$

$= \lambda \text{ Log }(\lambda + \sqrt{\lambda^2+4}) - \sqrt{\lambda^2+4} + 2$ unité d'aire

11) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque est $f^{-1} = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Or : $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = \text{Log }(y + \sqrt{y^2+4}) \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2+4} = e^x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y^2+4} = e^x - y \Leftrightarrow y^2 + 4 = (e^x - y)^2$

$\Leftrightarrow y^2 + 4 = e^{2x} + y^2 - 2ye^x \Leftrightarrow 2ye^x = e^{2x} - 4$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{e^{2x} - 4}{2e^x} = \dfrac{e^x - 4e^{-x}}{2}$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f^{-1}(x) = \dfrac{e^x - 4e^{-x}}{2}$.

PROBLÈME 9

Soit $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2}\text{Log }(2x^2 - 1)$.

Partie A

1) Déterminer D_f.

2) Montrer que : $(\forall x \in D_f)$, $\text{Log }(2x^2 - 1) = 2 \text{ Log }|x| + \text{Log}\left(2 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

3) Étudier les variations de f. (On prendra $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$).

4) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x]$. Conclusion ?

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - 2x]$. Conclusion ?

c) Étudier le signe de $f(x) - 2x$ pour $x \in]-\infty, -1[$ et pour $x \in]1, +\infty[$. Interpréter géométriquement ce résultat.

d) Résoudre l'équation $(f(x) - 2x = 0$. Conclusion ?

5) Construire (C_f).

Partie B

1) Calculer les coordonnées du point A de (C_f) telle que la tangente en A à (C_f) ait un coefficient directeur égal à 4.

2) Soit (Δ_m) la droite d'équation $y = 2x + m$ avec m un paramètre réel. Calculer, en fonction de m, les abscisses des points d'intersection de (C_f) et de (Δ_m).

3) En utilisant la courbe (C_f), discuter suivant les valeurs du paramètre réel k, le nombre des racines de l'équation (E) : $x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2k-4x}$.

Partie C

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans cette partie on suppose $x \in \,]a\,,+\infty[$.

1) Soit $g(x) = (x-a)\,\text{Log}\,(x-a)$. Calculer $g'(x)$. En déduire la valeur de $\int \text{Log}\,(x-a)\,dx$.

2) Calculer encore $\int \text{Log}\,(x-a)\,dx$ en utilisant une intégration par parties.

3) En déduire $\int f(x)\,dx$ pour $x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}\,,+\infty\right[$.

4) Sans faire les calculs, interpréter géométriquement l'intégrale $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \text{Log}\,(2x^2-1)\,dx$.

Solutions

Partie A

1) f est définie si : $2x^2 - 1 > 0$. Donc : $D_f = \left]-\infty\,,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}\,,+\infty\right[$.

2) $(\forall x \in D_f)$: $\text{Log}\,(2x^2-1) = \text{Log}\,x^2\left(2 - \frac{1}{x^2}\right) = \text{Log}\,x^2 + \text{Log}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)$

$$= 2\,\text{Log}\,|x| + \text{Log}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right).$$

3) $(\forall x \in D_f)$: $f'(x) = 2\,\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[[2x + \text{Log}\,(-x) + \frac{1}{2}\text{Log}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left[2 - \frac{\text{Log}\,(-x)}{-x} + \frac{1}{2x}\text{Log}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= -\infty\,[2 - 0 + 0 \times \text{Log}\,2] = -\infty \times 2 = -\infty\,.$$

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ x<-\frac{\sqrt{2}}{2}}} f(x) = -\sqrt{2} + \frac{1}{2}\lim_{u\to0_+}\text{Log}\,u = -\sqrt{2} + \frac{1}{2}(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}\\ x>\frac{\sqrt{2}}{2}}} f(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\lim_{u\to0_+}\text{Log}\,u = \sqrt{2} + \frac{1}{2}(-\infty) = -\infty$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖		‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖		‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2 + \dfrac{\text{Log}\,x}{x} + \dfrac{1}{2x}\text{Log}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)\right] = 2 + 0 + 0 \times \text{Log}\,2 = 2.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - 2x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\text{Log}\,(2x^2-1) = +\infty\,.$

Conclusion : la courbe (C_f) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = 2x$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[2 - \dfrac{\text{Log}\,(-x)}{-x} + \dfrac{1}{2x}\text{Log}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]$

$$= 2 - 0 + 0 \times \text{Log}\,2 = 2$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - 2x] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}\text{Log}\,(2x^2-1) = +\infty\,.$

Conclusion : la courbe (C_f) admet encore, pour x tendant vers $-\infty$, une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = 2x$.

c) Pour $x \in \,]-\infty\,,-1[$ et pour $x \in \,]1\,,+\infty[$ on a : $2x^2 - 1 > 1$; et par suite : $f(x) - 2x = \frac{1}{2}\text{Log}\,(2x^2-1) > 0$.

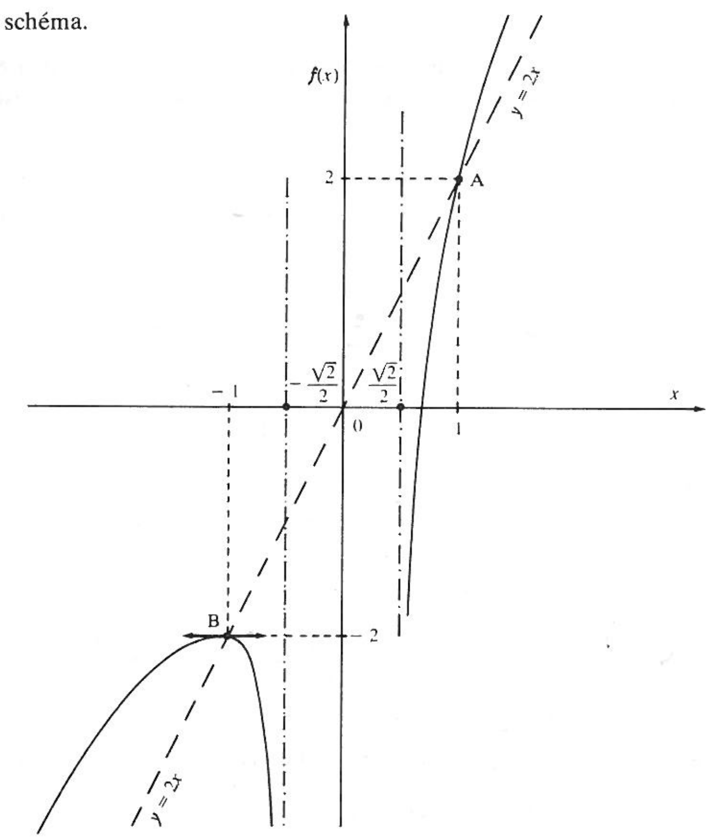
Donc, pour $x \in \,]-\infty\,,-1[$ et pour $x \in \,]1\,,+\infty[$, la courbe (C_f) se trouve au dessus de la droite d'équation $y = 2x$.

d) $f(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow \text{Log}\,(2x^2-1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Donc la courbe (C_f) coupe la droite d'équation $y = 2x$ en 2 points : A $(-1\,,-2)$ et B $(1\,,2)$.

5) Voir schéma.



Partie B

1) Soit A $(\alpha, f(\alpha))$ ce point. L'abscisse α doit vérifier : $f'(\alpha) = 4$.

Or : $f'(\alpha) = 4 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 4\alpha^2 - 2$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -\frac{1}{2}$$

Mais : $-\frac{1}{2} \notin D_f$. Donc $\alpha = -\frac{1}{2}$ ne convient pas.

Par suite : $\alpha = 1$. Donc A $(1, f(1))$ c'est-à-dire : A $(1, 2)$.

2) Les abscisses des points d'intersection de (C_f) et de (Δ_m) sont les solutions de l'équation $f(x) = 2x + m$.

Or : $f(x) = 2x + m \Leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{Log}(2x^2 - 1) = m \Leftrightarrow \operatorname{Log}(2x^2 - 1) = 2m$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 = e^{2m} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}(e^{2m} + 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e^{2m} + 1} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e^{2m} + 1}$$

Ces 2 solutions conviennent car : $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e^{2m} + 1} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e^{2m} + 1} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $(E) \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = e^{2k - 4x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 > 0 \\ 2k - 4x = \operatorname{Log}(2x^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ k = f(x) \end{cases}$

Donc les solutions de (E) sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et de la droite d'équation $y = k$ qui est parallèle à l'axe des abscisses. D'où la discussion suivante :

— Si $k < -2$, il y a 3 solutions
— Si $k = -2$, il y a 2 solutions
— Si $k > -2$, il y a une seule solution.

Partie C

1) $(\forall x \in]a, +\infty[: g'(x) = 1 + \operatorname{Log}(x - a)$.

Donc : $\int \operatorname{Log}(x - a)\,dx = \int (g'(x) - 1)\,dx = g(x) - x + c$

$$= (x - a)\operatorname{Log}(x - a) - x + c$$

2) Posons : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \operatorname{Log}(x - a) \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = x \\ v' = \frac{1}{x - a} \end{cases}$

Donc : $\int \operatorname{Log}(x - a)\,dx = x\operatorname{Log}(x - a) - \int \frac{x}{x - a}\,dx$

Mais : $\int \frac{x}{x - a}\,dx = \int \frac{x - a + a}{x - a}\,dx = \int\left(1 + \frac{a}{x - a}\right)dx = \int dx + a\int\frac{dx}{x - a}$

$$= x + a\operatorname{Log}(x - a) + c.$$

D'où : $\int \operatorname{Log}(x - a)\,dx = x\operatorname{Log}(x - a) - x - a\operatorname{Log}(x - a) + c$

$$= (x - a)\operatorname{Log}(x - a) - x + c.$$

3) $\int f(x)\,dx = \int 2x\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{Log}(2x^2 - 1)\,dx$

$$= x^2 + \frac{1}{2}\int \operatorname{Log} 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = x^2 + \frac{1}{2}\int \operatorname{Log} 2\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx$$

$$= x^2 + \frac{1}{2}\int\left[\operatorname{Log} 2 + \operatorname{Log}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{Log}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]dx$$

$$= x^2 + \frac{1}{2}\left[\int \operatorname{Log} 2\,dx + \int \operatorname{Log}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx + \int \operatorname{Log}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx\right]$$

$$= x^2 + \frac{1}{2}\left[x\operatorname{Log} 2 + \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\operatorname{Log}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - x\right.$$

$$\left. + \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\operatorname{Log}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - x\right] + c$$

$$= x^2 + \frac{1}{2}\left[x(\operatorname{Log} 2 - 2) + \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\operatorname{Log}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right.$$

$$\left. + \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\operatorname{Log}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + c$$

4) $\mathcal{A} = \int_1^{\sqrt{2}} (f(x) - 2x)\,dx$ = l'aire du domaine limité par (C_f), la droite d'équation $y = 2x$ et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = \sqrt{2}$.

PROBLÈME 10

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Soit $f_k(x) = \operatorname{Log}\frac{k}{x^2 + 2x}$. Soit (C_k) la courbe de f_k.

1) Étudier les variations de f_k suivant les valeurs de k.

2) Étudier les branches infinies de (C_k).

3) Discuter, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $f_k(x) = 0$.

4) Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour la courbe (C_k).

5) a) Donner les tableaux de variations de f_1 et de f_{-1}.
b) Montrer que f_1 s'annule en $x_1 \in]0, 1[$ et $x_2 \in]-3, -2[$.
c) Construire (C_1) et (C_{-1}) dans un même repère orthonormé.

Solutions

1) f_k est définie lorsque : $\frac{k}{x^2 + 2x} > 0$. Or on a :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x^2 + 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc le domaine de définition de f_k dépend du signe de k.

1^er^ cas : $k > 0$: Dans ce cas, $D_{f_k} =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

En plus : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim\limits_{u \to 0_+} \log u = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim\limits_{u \to 0_+} \log u = -\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim\limits_{u \to +\infty} \log u = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0_+} f_k(x) = \lim\limits_{u \to +\infty} \log u = +\infty$.

Enfin : $(\forall x \in D_{f_k}) : f_k(x) = \text{Log}\, k - \text{Log}\,(x^2 + 2x)$.

Donc : $(\forall x \in D_{f_k}) : f'_k(x) = -\dfrac{2x+2}{x^2+2x} = -2\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ du signe contraire de celui de $(x+1)$ car $x^2 + 2x > 0$. Donc :

x	$-\infty$		-2	-1	0		$+\infty$
$f'_k(x)$		$+$	‖		‖	$-$	
$f_k(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖		‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

2^e cas : $k < 0$: Dans ce cas : $D_{f_k} =]-2, 0[$.

En plus : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f_k(x) = \lim\limits_{u \to +\infty} \text{Log}\, u = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0_-} f_k(x) = \lim\limits_{u \to +\infty} \text{Log}\, u = +\infty$

Enfin : $(\forall x \in D_{f_k}) : f_k(x) = \text{Log}\,|k| - \text{Log}\,|x^2 + 2x|$

Donc : $(\forall x \in D_{f_k}) : f'_k(x) = -\dfrac{2x+2}{x^2+2x} = -2\dfrac{x+1}{x^2+2x}$

Mais : $(\forall x \in D_{f_k}) : x^2 + 2x < 0$, d'où $\dfrac{-2}{x^2+2x} > 0$; et par suite $f'_k(x)$ est du même signe que $x + 1$. Donc :

x	-2		-1		0
$f'_k(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f_k(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\log(-k)$	↗	$+\infty$ ‖

2) *1^er cas : $k > 0$:*

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f_k(x) = +\infty$; donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à (C_k) pour $\substack{x \to -2 \\ x < -2}$

$\lim\limits_{x \to 0_+} f_k(x) = +\infty$; donc l'axe des ordonnées est asymptote à (C_k) pour $x \to 0_+$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = -\infty$; en plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_k(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\text{Log}\, k}{x} - \dfrac{\text{Log}\,(x^2+2x)}{x}\right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\text{Log}\, k}{x} - \frac{\text{Log}\, x^2}{x} - \frac{1}{x}\text{Log}\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\text{Log}\, k}{x} - 2\,\frac{\text{Log}\, x}{x} - \frac{1}{x}\text{Log}\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right]$$

$$= 0 - 2 \times 0 - 0 \times 0 = 0.$$

Donc (C_k) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

Enfin : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f_k(x)}{x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\text{Log}\,|k|}{x} - \frac{\text{Log}\,|x^2+2x|}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\text{Log}\,|k|}{x} - \frac{2\,\text{Log}\,|x|}{x} - \frac{1}{x}\text{Log}\left|1 + \frac{2}{x}\right|\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\text{Log}\,|k|}{x} + \frac{2\,\text{Log}(-x)}{-x} - \frac{1}{x}\text{Log}\left|1 + \frac{2}{x}\right|\right)$$

$$= 0 + 2 \times 0 - 0 \times 0 = 0.$$

Donc (C_k) admet, pour x tendant vers $-\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

2ème cas : $k < 0$:

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f_k(x) = +\infty$; donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à (C_k) pour $\substack{x \to -2 \\ x > -2}$

$\lim\limits_{x \to 0_-} f_k(x) = +\infty$; donc l'axe des ordonnées est asymptote à (C_k) pour $x \to 0_-$

3) D'après les tableaux de variation du **1)** on constate que :

— Si $k > 0$, alors le 1^er tableau nous montre que l'équation $f_k(x) = 0$ admet toujours deux solutions : $x_1 \in]-\infty, -2[$ et $x_2 \in]0, +\infty[$.

— Si $k < 0$, alors le 2° tableau nous montre que f_k admet un minimum qui est $\text{Log}(-k)$. D'où la discussion suivante :

Pour $-k > 1$ c'est-à-dire $k < -1$, alors $\text{Log}\,(-k) > 0$, et par suite l'équation $f_k(x) = 0$ n'admet pas de solution.

Pour $-k = 1$ c'est-à-dire $k = -1$, alors $\text{Log}\,(-k) = 0$, et par suite l'équation $f_k(x) = 0$ admet une seule solution : -1.

Pour $0 < -k < 1$ c'est-à-dire $-1 < k < 0$ alors $\text{Log}\,(-k) < 0$, et par suite l'équation $f_k(x) = 0$ admet deux solutions :
$x_1 \in]-2, -1[$ et $x_2 \in]-1, 0[$.

Autre méthode :

$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{k}{x^2+2x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - k = 0$; $\Delta' = 1 + k$.

— Si $\Delta' > 0$ c'est-à-dire $k > -1$ alors l'équation $f_k(x) = 0$ admet deux solutions : $x_1 = -1 + \sqrt{1+k}$ et $x_2 = -1 - \sqrt{1+k}$

— Si $\Delta' = 0$ c'est-à-dire $k = -1$ alors l'équation $f_k(x) = 0$ admet une solution double $x = -1$

— Si $\Delta' < 0$ c'est-à-dire $k < -1$ alors l'équation $f_k(x) = 0$ n'admet pas de solution.

4) Posons : $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y. \end{cases}$

Donc : $y = f_k(x) \Leftrightarrow Y = f_k(X - 1) = \text{Log}\,\dfrac{k}{(X-1)^2 + 2(X-1)}$

$$= \text{Log}\,\frac{k}{X^2 - 1} = F_k(X).$$

Si $k > 0$ alors $D_{F_k} =]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[$.

Si $k < 0$ alors $D_{F_k} =]-1, 1[$.

D'où : $(\forall k \in \mathbb{R}^*)$, D_{F_k} est symétrique par rapport à zéro.

Par suite : $(\forall X \in D_{F_k})$, $-X \in D_{F_k}$, et $F_k(-X) = F_k(X)$.

Donc F_k est paire. Et par conséquent, la droite d'équation $X = 0$ c'est-à-dire $x = -1$ est axe de symétrie pour (C_k).

5) a) D'après la question 1) on a immédiatement :

X	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	‖		‖	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖		‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

et

x	-2		-1		0
$f_{-1}'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f_{-1}(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖

b) f_1 est continue et strictement décroissante sur $]0, 1]$.

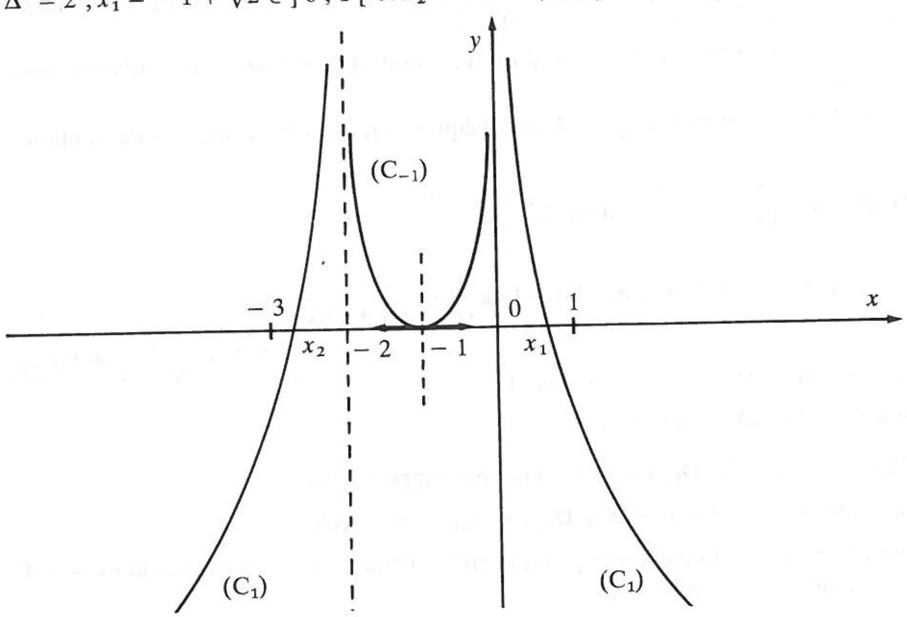
En plus : $f_1(1) = \text{Log}\frac{1}{3} = -\text{Log}\,3 < 0$
Et : $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = +\infty$
} Donc $(\exists ! x_1 \in]0, 1[) : f_1(x_1) = 0$

De même :
f_1 est continue et strictement croissante sur $[-3, -2[$.

En plus : $f_1(-3) = \text{Log}\frac{1}{3} = -\text{Log}\,3 < 0$
Et : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f_1(x) = +\infty$
} Donc $(\exists ! x_2 \in]-3, -2[) : f_1(x_2) = 0$

Autre méthode :
$f_1(x) = 0 \Leftrightarrow -\text{Log}(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \text{Log}(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta' = 2$; $x_1 = -1 + \sqrt{2} \in]0, 1[$ et $x_2 = -1 - \sqrt{2} \in]-3, -2[$.



PROBLÈME 11

Soit $m \in \mathbb{R}^*$. Soit $f_m(x) = m(1 - x)\,\text{Log}\,x$. Soit (C_m) la courbe de f_m.

1) Etudier les variations de $g(x) = 1 - x - x\,\text{Log}\,x$. Calculer $g(1)$.
En déduire le signe de $g(x)$.
2) Etudier les variations de f_m.
3) Etudier les branches infinies de (C_m).
Comparer (C_m) et (C_{-m}).
4) Calculer $f_m(1)$. Conclusion ? Retrouver ce résultat par deux autres méthodes.
5) Calculer $f_1(e)$ et $f_{-2}(e)$. On donne $e \simeq 2{,}7$.
Construire (C_1) et (C_{-2}) dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Etudier la position de (C_2) par rapport à (C_1).
En déduire (C_{-1}) et (C_2) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
6) Calculer l'aire en cm² du domaine plan limité par (C_{-2}), (C_1), et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ (on donne $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm).

Solutions

1) $D_g =]0, +\infty[$; $(\forall x \in D_g) : g'(x) = -(\text{Log}\,x + 2)$.

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. Donc :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$			
$g(x)$	1	↗	$1 + e^{-2}$	↘	0	↘	$-\infty$

$g(1) = 0$. Or : $1 + e^{-2} = 1 + \frac{1}{e^2} > 0$.

Donc le signe de $g(x)$ est donné par :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

2) $D_{f_m} =]0, +\infty[$; $(\forall x \in D_{f_m}) : f_m'(x) = -m\,\text{Log}\,x + m(1 - x)\,\frac{1}{x}$

$$= m\,\frac{1 - x - x\,\text{Log}\,x}{x} = m\,\frac{g(x)}{x}.$$

Le signe de $f_m'(x)$ dépend donc du signe de m.
De même on remarque que $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$ dépendent aussi du signe de m. Donc on distingue 2 cas :

1er cas : $m > 0$: dans ce cas $f_m'(x)$ a même signe que $g(x)$.

En plus : $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x) = m(1)(-\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = m(-\infty)(+\infty) = -\infty$.

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f_m'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

2^e *cas* : $m < 0$: dans ce cas $f'_m(x)$ a le signe contraire de celui de $g(x)$.

En plus : $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x) = m(1)(-\infty) = +\infty$ car $m < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = m(-\infty)(+\infty) = m(-\infty) = +\infty$ car $m < 0$.

Donc :

x	0		1		$+\infty$
$f'_m(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3) $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } m > 0 \\ +\infty & \text{si } m < 0. \end{cases}$

Donc l'axe des ordonnées est asymptote à (C_m) quand x tend vers 0.

De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } m > 0 \\ +\infty & \text{si } m < 0. \end{cases}$

En plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_m(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} m\left(\dfrac{1-x}{x}\right)\text{Log}\, x = m(-1)(+\infty) = m(-\infty)$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{si } m > 0 \\ +\infty & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

Donc (C_m) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

Enfin : $f_{-m}(x) = -f_m(x)$. Donc (C_m) et (C_{-m}) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

4) $f_m(1) = 0$. Donc $f_m(1)$ est indépendant de m. Par conséquent, toutes les courbes (C_m) passent par le point fixe $A(1, 0)$.

On peut retrouver ce résultat par deux autres méthodes : En effet, il s'agit de démontrer, par deux autres méthodes, que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe.

1ère méthode : Soit $A(x_0, y_0)$ le point fixe cherché. Soit $m \in \mathbb{R}^*$ et $m' \in \mathbb{R}^*$.

Donc (C_m) et $(C_{m'})$ passent par A.

Donc les coordonnées (x_0, y_0) de A vérifient le système : (S) : $\begin{cases} f_m(x_0) = y_0 \\ f_{m'}(x_0) = y_0 \end{cases}$

Or : (S) $\Rightarrow f_m(x_0) = f_{m'}(x_0) \Leftrightarrow m(1 - x_0)\,\text{Log}\, x_0 = m'(1 - x_0)\,\text{Log}\, x_0$

$\Leftrightarrow (m - m')(1 - x_0)\,\text{Log}\, x_0 = 0 \Leftrightarrow (1 - x_0)\,\text{Log}\, x_0 = 0$ car $m \neq m'$

$\Leftrightarrow 1 - x_0 = 0$ ou $\text{Log}\, x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Donc $x_0 = 1$ et $y_0 = f_m(x_0) = f_m(1) = 0$. Donc A (1 , 0).

2e méthode : Soit A (x_0, y_0) le point fixe cherché. On a :

$(\forall m \in \mathbb{R}^*)$, (C_m) passe par A (x_0, y_0) $\Leftrightarrow (\forall m \in \mathbb{R}^*), f_m(x_0) = y_0$

$\Leftrightarrow (\forall m \in \mathbb{R}^*), m(1 - x_0)\,\text{Log}\, x_0 = y_0$

$\Leftrightarrow (\forall m \in \mathbb{R}^*), m(1 - x_0)\,\text{Log}\, x_0 - y_0 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - x_0)\,\text{Log}\, x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

Donc le point fixe cherché est A (1 , 0).

5) $f_1(e) = 1 - e \simeq 1 - 2{,}7 = -1{,}7$

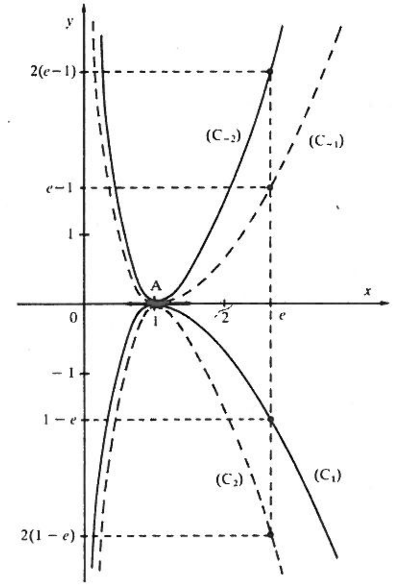
$f_{-2}(e) = -(1 - e) = 2(e - 1) \simeq 2(2{,}7 - 1) = 3{,}4$.

D'après la question 2), on en déduit immédiatement :

x	0		1		$+\infty$
$f'_1(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

et

x	0		1		$+\infty$
$f'_{-2}(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_{-2}(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



Pour la construction de (C_1) et (C_{-2}), voir schéma.

D'autre part : étudions la position de (C_2) par rapport à (C_1). Etudions donc le signe de $f_1(x) - f_2(x)$.

On a :

$f_1(x) - f_2(x) = (1 - x)\,\text{Log}\, x - 2(1 - x)\,\text{Log}\, x$

$= (1 - x - 2 + 2x)\,\text{Log}\, x$

$= (x - 1)\,\text{Log}\, x$.

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$x - 1$	‖	$-$	0	$+$	
$\text{Log}\, x$	‖	$-$	0	$+$	
P	‖	$+$	0	$+$	

Donc : $(\forall x \in \,]0, 1[\, \cup \,]1, +\infty[)$, $f_1(x) - f_2(x) > 0$.

Par conséquent : $(\forall x \in \,]0, 1[\, \cup \,]1, +\infty[)$, (C_1) est au dessus de (C_2).

En plus : A (1 , 0) est un point commun de (C_1) et (C_2).

(Rappelons que A (1 , 0) est un point commun pour toutes les courbes (C_m)).

Enfin : comment construire (C_{-1}) et (C_2) ? On a vu dans la question 3) que (C_m) et (C_{-m}) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Donc : (C_{-1}) se déduit de (C_1) dans la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

De même : (C_2) se déduit de (C_{-2}) dans la même symétrie.

6) $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e (f_{-2}(x) - f_1(x))\,dx = \int_1^e [-2(1 - x)\,\text{Log}\, x - (1 - x)\,\text{Log}\, x]\,dx$

$$= \int_1^e (-2 + 2x - 1 + x)\,\text{Log}\, x\,dx = 3\int_1^e (x - 1)\,\text{Log}\, x\,dx.$$

Posons : $\begin{cases} u' = x - 1 \\ v = \text{Log}\, x \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = \dfrac{x^2}{2} - x \\ v' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Donc : $\displaystyle\int_1^e (x-1)\operatorname{Log} x\,dx = \left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\operatorname{Log}x\right]_1^e - \int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e+\frac14-1 = \frac{e^2}{4}-\frac34$$

D'où : $\mathcal{A} = 3\left(\frac{e^2}{4}-\frac34\right)$ unité d'aire.

$$= 3\left(\frac{e^2}{4}-\frac34\right)4\text{ cm}^2 = 3e^2 - 9\text{ cm}^2$$

PROBLÈME 12

Soit $f_n(x) = e^2\,\frac{(\operatorname{Log}x)^n}{x}$ avec $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Soit (C_n) la courbe de f_n.

1) Étudier les variations de f_n.

2) a) Calculer $f_n(1)$ et $f_n(e)$. Conclusion.
b) Étudier le signe de $f_3(x) - f_2(x)$. Conclusion.

3) Construire (C_2) et (C_3) dans un même repère orthonormé.

4) Calculer l'aire de la portion du plan comprise entre (C_2), (C_3) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Solutions

1) $D_{f_n} =]0, +\infty[$; $(\forall x \in D_{f_n}) : f_n'(x) = e^2\,\frac{(\operatorname{Log}x)^{n-1}(n-\operatorname{Log}x)}{x^2}$

Le signe de $f_n'(x)$ dépend du signe de $(\operatorname{Log}x)^{n-1}$, donc dépend de la parité de n. De même $\lim_{x\to 0} f_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ dépendent de la parité de n. On distingue donc 2 cas :

1^er cas : n pair : dans ce cas $n-1$ est impair ; par suite le signe de $(\operatorname{Log}x)^{n-1}$ est celui de $\operatorname{Log}x$; d'où : $f_n'(x)$ est du signe de $\operatorname{Log}x\,(n-\operatorname{Log}x)$. D'autre part :

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^2}{x}(\operatorname{Log}x)^n = +\infty\,(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = e^2 \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{Log}x}{\sqrt[n]{x}}\right)^n = e^2 \lim_{x\to+\infty}\left(n\,\frac{\operatorname{Log}\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}\right)^n = e^2(n\times 0)^n = 0$$

Donc :

x	0		1		e^n		$+\infty$
$\operatorname{Log}x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$n-\operatorname{Log}x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$e^2\left(\frac{n}{e}\right)^n$	↘	0

2^e cas : n impair : dans ce cas $n-1$ est pair ; et par suite on a :
$(\forall x \in]0, +\infty[) : (\operatorname{Log}x)^{n-1} \geqslant 0$. D'autre part :

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^2}{x}(\operatorname{Log}x)^n = +\infty\,(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = e^2 \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{Log}x}{\sqrt[n]{x}}\right)^n = e^2 \lim_{x\to+\infty}\left(n\,\frac{\operatorname{Log}\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}\right)^n = e^2(n\times 0)^n = 0.$$

Donc :

x	0		1		e^n		
$(\operatorname{Log}x)^{n-1}$	‖	$+$	0	$+$		$+$	
$n-\operatorname{Log}x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$e^2\left(\frac{n}{e}\right)^n$	↘	0

2) a) $f_n(1) = 0$ et $f_n(e) = e$. Donc $f_n(1)$ et $f_n(e)$ sont indépendants de n. Par suite, toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes : A $(1, 0)$ et B (e, e).

b) $f_3(x) - f_2(x) = e^2\,\frac{(\operatorname{Log}x)^2}{x}(\operatorname{Log}x - 1)$. Son signe est celui de $(\operatorname{Log}x)^2(\operatorname{Log}x-1)$. Or on a :

x	0		1		e		$+\infty$
$(\operatorname{Log}x)^2$	‖	$+$	0	$+$		$+$	
$\operatorname{Log}x - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
P	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : dans $]0, 1[\cup]1, e[$, (C_3) est au dessous de (C_2).
Et : dans $]e, +\infty[$, (C_3) est au dessus de (C_2).

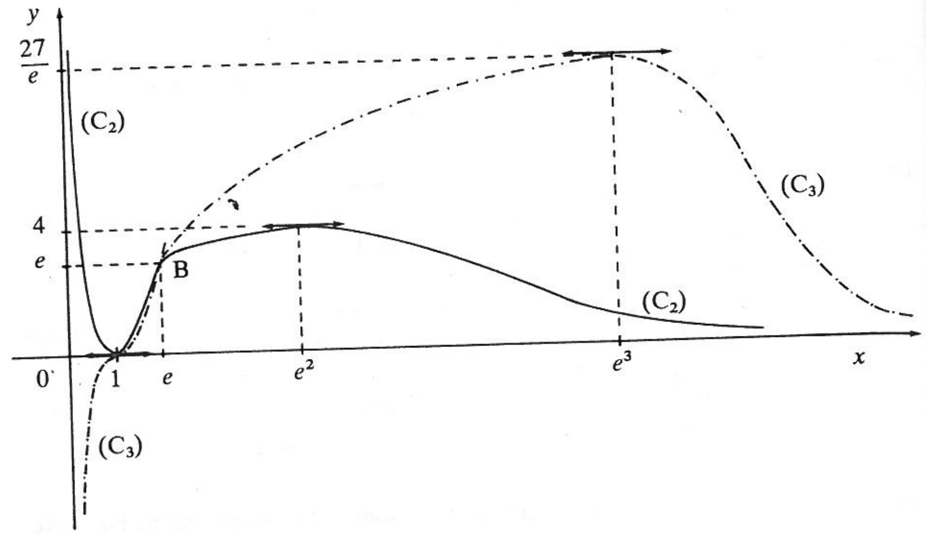
3) D'après la question 1) on en déduit immédiatement les tableaux suivants :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f_2'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0

et

x	0		1		e^3		$+\infty$
$f_3'(x)$	‖	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_3(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{27}{e}$	↘	0

On a : $e^3 \simeq 19{,}5$ et $\frac{27}{e} \simeq 10$. D'où les courbes (C_2) et (C_3) :



4) (C_2) est au dessus de (C_3) pour $x \in [1, e]$; et (C_2) est au dessous de (C_3) pour $x \in [e, e^2]$. Donc :

$$\mathscr{A} = \int_1^e (f_2(x) - f_3(x))\,dx + \int_e^{e^2} (f_3(x) - f_2(x))\,dx$$

$$= e^2 \int_1^e [(\text{Log}\,x)^2 - (\text{Log}\,x)^3]\,(\text{Log}\,x)'\,dx + e^2 \int_e^{e^2} [(\text{Log}\,x)^3 - (\text{Log}\,x)^2]\,(\text{Log}\,x)'\,dx$$

$$= e^2 \left[\frac{(\text{Log}\,x)^3}{3} - \frac{(\text{Log}\,x)^4}{4}\right]_1^e + e^2 \left[\frac{(\text{Log}\,x)^4}{4} - \frac{(\text{Log}\,x)^3}{3}\right]_e^{e^2}$$

$$= e^2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 0\right] + e^2\left[4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right] = \frac{3}{2}e^2 \text{ unité d'aire.}$$

Fonctions exponentielles

Le nombre e^{ix} ; Linéarisation

Notations :

D_f = le domaine de définition de f.
(C_f) = la courbe représentative de f.
$P(f)$ = la période de f.

RAPPELS

1) $(e^u)' = u'e^u$.

2) $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x > 0$ et $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

$(\forall x \in \mathbb{R}) : \text{Log}\,e^x = x$
$(\forall x \in]0, +\infty[) : e^{\text{Log}\,x} = x$.

3) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent : $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{u\to+\infty} (-u)^n e^{-u} = \lim_{u\to+\infty} (-1)^n \frac{u^n}{e^u} = (-1)^n \times 0 = 0$.

De même : $\lim_{x\to-\infty} (-x)^n e^x = \lim_{u\to+\infty} u^n e^{-u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u^n}{e^u} = 0$.

4) $\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Par conséquent : $\lim_{x\to0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$.

Exemple : $\lim_{x\to0} \frac{e^x - \cos x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 + 1 - \cos x}{x} = \lim_{x\to0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x}\right)$

$$= 1 + \lim_{x\to0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 1 + \lim_{x\to0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin\frac{x}{2}$$

$$= 1 + 1 \times 0 = 1.$$

5) $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$; $\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2}$; $(e^x)^n = e^{nx}$

6) Pour étudier la fonction $f(x) = a^x$ avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, il suffit d'écrire $f(x) = e^{\text{Log}(a^x)} = e^{x\,\text{Log}\,a}$ et utiliser les propriétés des exponentielles de base e.

Par exemple :

$D_f = \mathbb{R}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \text{Log}\,a\; e^{x\,\text{Log}\,a} = a^x\,\text{Log}\,a$.

$(\forall x \in \mathbb{R}) : a^x = e^{x\,\text{Log}\,a} > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x\,\text{Log}\,a} = \begin{cases} \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty \text{ si } a > 1 \\ \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0 \text{ si } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x\,\text{Log}\,a} = \begin{cases} \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0 \text{ si } a > 1 \\ \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty \text{ si } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\,\text{Log}\,a} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \text{Log}\,a \left(\frac{e^{x\,\text{Log}\,a} - 1}{x\,\text{Log}\,a}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0} \text{Log}\,a\,\frac{e^u - 1}{u} = \text{Log}\,a$$

$$a^x = \lambda \Leftrightarrow e^{x\,\text{Log}\,a} = \lambda \Leftrightarrow x\,\text{Log}\,a = \text{Log}\,\lambda \Leftrightarrow x = \frac{\text{Log}\,\lambda}{\text{Log}\,a} = \log_a(\lambda).$$

$$a^x > \lambda \Leftrightarrow e^{x\,\text{Log}\,a} > \lambda \Leftrightarrow x\,\text{Log}\,a > \text{Log}\,\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{\text{Log}\,\lambda}{\text{Log}\,a} = \log_a(\lambda) \text{ si } a > 1 \\ x < \dfrac{\text{Log}\,\lambda}{\text{Log}\,a} = \log_a(\lambda) \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Enfin : $(a^u)' = (e^{u\,\text{Log}\,a})' = u'\text{Log}\,a\; e^{u\,\text{Log}\,a} = u'a^u\,\text{Log}\,a$.

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1\text{Log}\,a} > e^{x_2\text{Log}\,a} \Leftrightarrow x_1\,\text{Log}\,a > x_2\,\text{Log}\,a$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)\,\text{Log}\,a > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > x_2 \text{ si } a > 1 \\ x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Remarque :

Avant de résoudre les exercices suivants, voir d'abord les exercices sur les intégrales des fonctions exponentielles dans le chapitre 8, partie C, pour s'entraîner avec les calculs sur les fonctions exponentielles. Après avoir terminé, chercher les exercices suivants :

EXERCICE 1

Etudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{-x}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{\text{tg}\,x}}$

3) $\lim\limits_{x\to 0_+} x\, e^{\frac{1}{\text{tg}\,x}}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{4+5x^2-2x^3}}{x^3}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x\,\text{Log}\,|x|$

Solutions

1) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{-x}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{\sqrt{u}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u}\sqrt{u} = +\infty \times +\infty = +\infty.$$

2) $$\lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{\text{tg}\,x}} = \lim_{x\to 0_-} \frac{\text{tg}\,x}{x} \lim_{u\to-\infty} u e^u \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{\text{tg}\,x}$$
$$= 1 \times 0 = 0$$

3) $$\lim_{x\to 0_+} x e^{\frac{1}{\text{tg}\,x}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{\text{tg}\,x} \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{\text{tg}\,x}$$
$$= 1 \times +\infty = +\infty.$$

4) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{4+5x^2-2x^3}}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{4+5x^2-2x^3}}{4+5x^2-2x^3} \, \frac{4+5x^2-2x^3}{x^3}$$
$$= \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-2x^3}{x^3}\right) = +\infty\,(-2) = -\infty$$

5) $$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x\,\text{Log}\,|x| = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^x\,\text{Log}\,(-x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 e^x \frac{\text{Log}\,(-x)}{-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (-x)^3 e^x \frac{\text{Log}\,(-x)}{-x}$$
$$= \lim_{u\to+\infty} \frac{u^3}{e^u} \frac{\text{Log}\,u}{u} = 0_+ \times 0_+ = +\infty$$

Car d'après le rappel du cours on a : $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{e^u}{u^3} = +\infty$

EXERCICE 2

Soit f définie par $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
2) Étudier la dérivable de f en $x_0 = 0$.
3) Étudier les variations de f.
4) Étudier les branches infinies de (C_f).
5) Calculer $f(-1)$, $f(-2)$ et $f(2)$.
Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Solutions

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ car on a aussi $0 \in D_f$ puisque $f(0) = 0$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0 = f(0)$.

Et : $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$.

Donc : f est continue seulement à gauche en $x_0 = 0$.

2) f n'est pas continue à droite en $x_0 = 0$; Par suite elle n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 0$. Mais f est continue à gauche en $x_0 = 0$.
On cherche donc si f est dérivable à gauche en $x_0 = 0$. On a :

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_-} \frac{e^{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0_-} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\right) e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}} \quad \frac{1}{\frac{1}{2}x^3 + 1 - \frac{3x}{2}}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} t\, e^t \lim_{x \to 0_-} \frac{1}{\frac{1}{2}x^3 + 1 - \frac{3x}{2}} = 0 \times 1 = 0 .$$

Conclusion : f est dérivable à gauche en $x_0 = 0$ et $f'_g(0) = 0$.
Par conséquent, (C_f) admet au point A $(0 , 0)$ une demi tangente à gauche parallèle à l'axe $x'x$.

3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x) = \left(x - \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ qui est aussi du signe de $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Mais $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 1 > 0$.
Donc : $f'(x)$ a finalement le signe de $x - 1$.
D'autre part : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$

Et : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$.

D'où

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0 ‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x}\right)$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x}\right) = +\infty(-\infty) = -\infty .$$

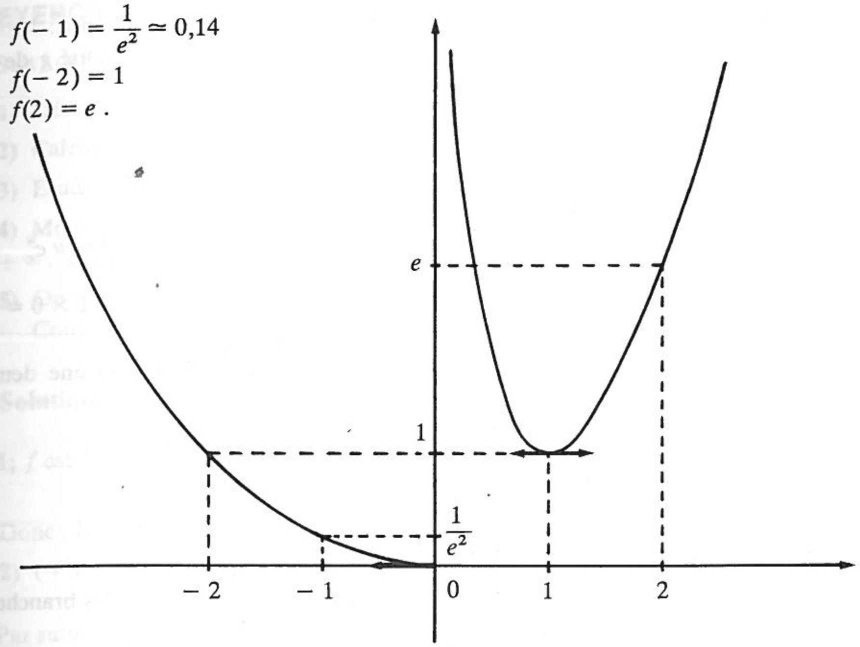
Donc : (C_f) admet, pour x tendant vers $-\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe $y'y$.

De même : $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x}\right)$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x}\right) = +\infty\,(+\infty) = +\infty .$$

Donc : (C_f) admet encore, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe $y'y$.

5) $f(-1) = \frac{1}{e^2} \simeq 0{,}14$
$f(-2) = 1$
$f(2) = e$.



EXERCICE 3

Soit f définie par : $f(x) = x^2 e^{\frac{x}{x-1}}$

1) Étudier les variations de f .
2) Préciser la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
3) Étudier les branches infinies de (C_f) .
4) Construire (C_f) dans un repère orthogonale $(0 , \vec{i} , \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 0{,}25$ cm

Solutions

1) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \times e = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \times e = +\infty$.

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 1 \times \lim_{u \to -\infty} e^u = 1 \times 0 = 0$; $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 1 \times \lim_{u \to +\infty} e^u = 1 \times +\infty = +\infty$.

D'autre part : $(\forall x \in D_f) : f'(x) = e^{\frac{x}{x-1}} \left[\frac{2x^3 - 5x^2 + 2x}{(x-1)^2}\right]$. Son signe est celui de $2x^3 - 5x^2 + 2x = x(2x^2 - 5x + 2)$.

D'où :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x^2 - 5x + 2$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{4e}$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	$4e^2$	↗	$+\infty$

2) On peut préciser (C_f) seulement à gauche du point d'abscisse 1 car on a : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$. Considérons le prolongement par continuité g de f à gauche de 1 . On a : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \in D_f \\ g(1) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 0 \end{cases}$

$$\text{D'où : } \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{x^2}{x-1}\, e^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} x\,\frac{x}{x-1}\, e^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} x \lim_{u\to-\infty} u\, e^{u}$$
$$= 1 \times 0 = 0$$

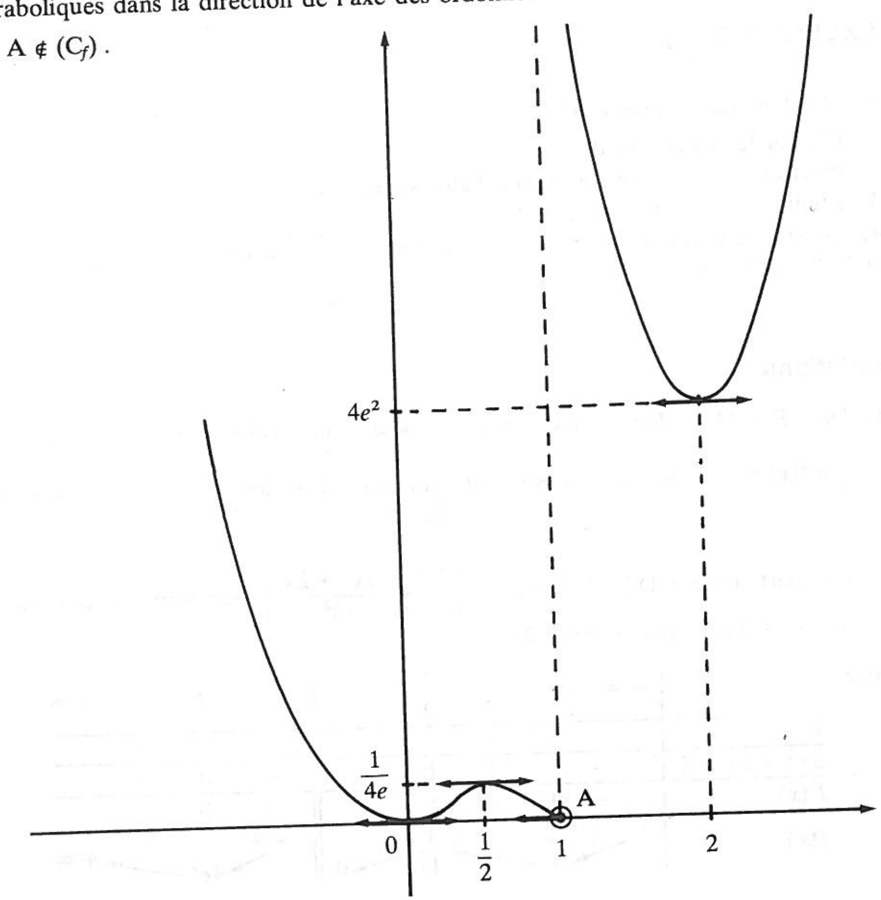
Donc g est dérivable à gauche en 1 et sa dérivée à gauche est 0 .
Donc la courbe de g admet à gauche du point A $(1\,,g(1))$ = A $(1\,,0)$ une demi tangente portée par l'axe des abscisses.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\, e^{\frac{x}{x-1}} = +\infty \times e = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\, e^{\frac{x}{x-1}} = -\infty \times e = -\infty$

Donc (C_f) admet, pour x tendant vers $+\infty$ et pour x tendant vers $-\infty$, des branches paraboliques dans la direction de l'axe des ordonnées.

4) A $\notin (C_f)$.



EXERCICE 4

Soit f définie par $f(x) = \text{Log}\,\dfrac{e^x - 3}{e^{2x}+7}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.
3) Etudier les variations de f.
4) Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_f) quand x tend vers $+\infty$.
5) On donne : Log 2 ≃ 0 , 7 ; Log 3 ≃ 1 , 1 ; Log 7 ≃ 1 , 9.
Construire la courbe représentative (C_f) de f dans un repère orthonormé.

Solutions

1; f est définie lorsque : $\begin{cases} e^{2x} + 7 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{e^x-3}{e^{2x}+7} > 0 \Leftrightarrow e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \text{Log}\,3. \end{cases}$

Donc : le domaine de définition de f est $D_f =]\,\text{Log}\,3\,,+\infty\,[$.

2) $(\forall\, x \in D_f) : f(x) = \text{Log}\,|\,e^x - 3\,| - \text{Log}\,|\,e^{2x}+7\,| = \text{Log}\,(e^x-3) - \text{Log}\,(e^{2x}+7)$

Par suite : $(\forall\, x \in D_f) : f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x-3} - \dfrac{2\,e^{2x}}{e^{2x}+7} = \dfrac{e^x\,(e^{2x}+7) - 2\,e^{2x}\,(e^x-3)}{(e^x-3)\,(e^{2x}+7)}$

$$= \frac{e^x\,(-\,e^{2x} + 6\,e^x + 7)}{(e^x-3)\,(e^{2x}+7)}$$

Donc : $f'(x)$ a le signe de $-\,e^{2x} + 6\,e^x + 7$ qui est un trinôme en e^x. Son discriminant réduit est $\Delta' = 9 + 7 = 16$.

D'où : $e^x = \dfrac{-3+4}{-1} = -1$ (ne convient pas car $e^x > 0$).

ou $e^x = \dfrac{-3-4}{-1} = 7$ (convient car $e^x > 0$).

Par conséquent : $-\,e^{2x} + 6\,e^x + 7 = -\,(e^x+1)\,(e^x-7)$ qui a le signe contraire de celui de $e^x - 7$ car $e^x + 1 > 0$.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to\text{Log}\,3\\x>\text{Log}\,3}} f(x) = \lim\limits_{t\to0} \text{Log}\,t = -\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \text{Log}\,\frac{1-\frac{3}{e^x}}{e^x+\frac{7}{e^x}} = \lim_{t\to0} \text{Log}\,t = -\infty\,.$$

D'où :

x	Log 3		Log 7		$+\infty$
$e^x - 7$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-$ Log 14	↘	$-\infty$

car $f(\text{Log}\,7) = \text{Log}\,\dfrac{7-3}{49+7} = \text{Log}\,\dfrac{1}{14}$
$= -$ Log 14.
puisque $e^{\text{Log}\,x} = x$ et $e^{2x} = (e^x)^2$

4) Il suffit de démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]=0$.

1re méthode : $(\forall x \in D_f) : f(x) + x = \text{Log}\,\dfrac{e^x-3}{e^{2x}+7} + \text{Log}\,e^x = \text{Log}\,\dfrac{e^x(e^x-3)}{e^{2x}+7}$

$$= \text{Log}\,\frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}+7} = \text{Log}\,\frac{1-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{7}{e^{2x}}}$$

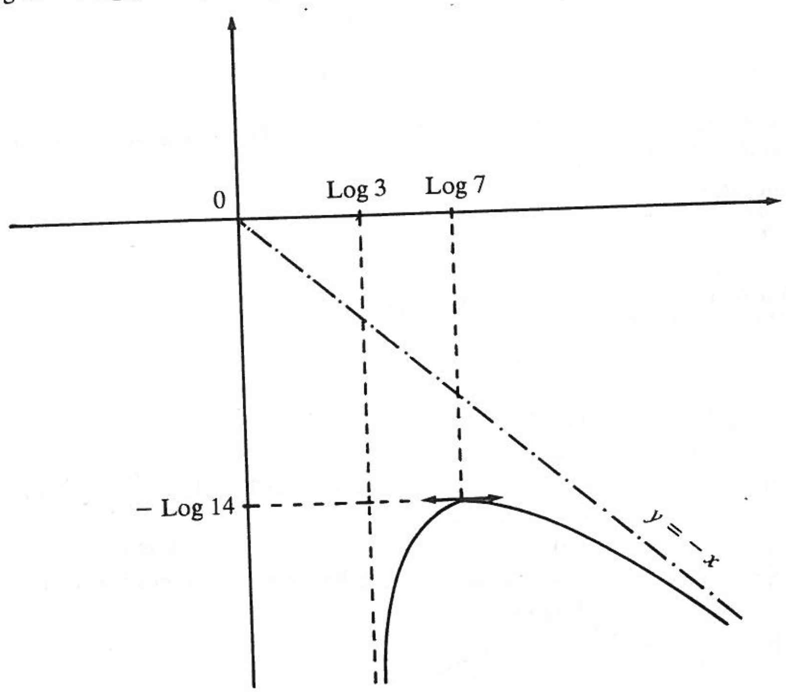
Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\text{Log}\,\dfrac{1-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{7}{e^{2x}}} = \text{Log}\,1 = 0.$

2e méthode : $(\forall x \in D_f) : f(x) = \text{Log}\,\dfrac{e^x\left(1-\frac{3}{e^x}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{7}{e^{2x}}\right)} = \text{Log}\left(\dfrac{1}{e^x}\,\dfrac{1-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{7}{e^{2x}}}\right)$

$$= \text{Log}\,\frac{1}{e^x} + \text{Log}\,\frac{1-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{7}{e^{2x}}} = -\,\text{Log}\,e^x + \text{Log}\,\frac{1-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{7}{e^{2x}}} = -\,x + \text{Log}\,\frac{1-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{7}{e^{2x}}}$$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\text{Log}\,\dfrac{1-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{7}{e^{2x}}} = \text{Log}\,1 = 0.$

5) $\text{Log}\,14 = \text{Log}\,(2\times 7) = \text{Log}\,2 + \text{Log}\,7 \simeq 0{,}7 + 1{,}9 = 2{,}6.$



EXERCICE 5

Soit f définie par : $f(x) = e^{\frac{1}{\text{Log}\,x}+\frac{1}{x}}$

1) Etudier les variations de f.

2) Donner les valeurs de $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\text{Log}\,x}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{1}{\text{Log}\,x}\,e^{\frac{1}{\text{Log}\,x}}$

En déduire la valeur de $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{f(x)}{x-1}$

3) Préciser la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
Construire (C_f).

Solutions

1) f est définie lorsque : $x > 0$ et $\text{Log}\,x \neq 0$. Donc $D_f = \,]0\,,1[\,\cup\,]1\,,+\infty[$.

$(\forall x \in D_f) : f'(x) = \left[-\dfrac{1}{x(\text{Log}\,x)^2} - \dfrac{1}{x^2}\right] e^{\frac{1}{\text{Log}\,x}+\frac{1}{x}}$. Donc : $f'(x) < 0$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to0_+} f(x) = \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$;

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$.

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	1

2) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\text{Log}\,x}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\text{Log}\,x-\text{Log}\,1}{x-1} = (\text{Log}\,x)'_{x=1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{1}{\text{Log}\,x}\,e^{\frac{1}{\text{Log}\,x}} = \lim\limits_{u\to-\infty} u\,e^u = 0$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{1}{x-1}\,e^{\frac{1}{\text{Log}\,x}}\,e^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{\text{Log}\,x}{x-1}\left(\frac{1}{\text{Log}\,x}\,e^{\frac{1}{\text{Log}\,x}}\right)e^{\frac{1}{x}} = 1\,(0)\,e = 0\,.$$

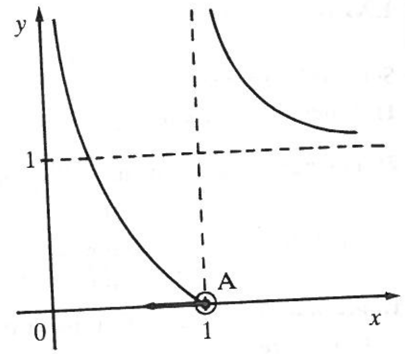
3) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$. Donc on peut préciser la courbe de f seulement à gauche du point d'abscisse 1 . Considérons donc le prolongement par continuité g de f à gauche de 1 .

On a : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \in D_f \\ g(1) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 0\,. \end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{f(x)}{x-1} = 0$ d'après 2).

Donc g est dérivable à gauche de 1 et sa dérivée à gauche est 0 . Donc la courbe (C_g) de g admet à gauche du point $A\ (1\ , g(1)) = A\ (1\ , 0)$ une demi tangente portée par l'axe des abscisses.

$A \notin (C_f)$.



EXERCICE 6

Soit f définie par $f(x) = e^{\frac{1}{\operatorname{Log} x}} + e^{\frac{1}{x}}$

1) Étudier les variations de f .

2) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{e^{\frac{1}{\operatorname{Log} x}}}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e}{x-1}$

3) Préciser la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.

4) Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$. Construire cette tangente et la courbe $(C_f$ dans un repère orthonormé $(0\ , \vec{i}\ , \vec{j})$.

Solutions

1) f est définie si $x > 0$ et $\operatorname{Log} x \neq 0$. D'où : $D_f =]\,0\ , 1\,[\,\cup\,]\,1\ , +\infty\,[$.

$(\forall\ x \in D_f) : f'(x) = -\dfrac{1}{x(\operatorname{Log} x)^2}\, e^{\frac{1}{\operatorname{Log} x}} - \dfrac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}} < 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{u \to 0_-} e^u + \lim\limits_{t \to +\infty} e^t = 1 + \infty = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{u \to 0} e^u + \lim\limits_{t \to 0} e^t = 1 + 1 = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{u \to -\infty} e^u + \lim\limits_{t \to 1} e^t = 0 + e = e$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{u \to +\infty} e^u + \lim\limits_{t \to 1} e^t = +\infty + e = +\infty$.

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	e ‖ $+\infty$	↘	2

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{e^{\frac{1}{\operatorname{Log} x}}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x-1} \left(\dfrac{1}{\operatorname{Log} x}\, e^{\frac{1}{\operatorname{Log} x}}\right) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x-1} \lim\limits_{u \to -\infty} u\, e^u = 1 \times 0 = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{F(x) - F(1)}{x-1}$ $\left(\text{avec } F(x) = e^{\frac{1}{x}}\right)$

$= F'(1) = -\dfrac{1}{1}\, e^{\frac{1}{1}} = -e$ car $F'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$

3) On a : $1 \notin D_f$. Mais : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = e$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty$.

Donc on peut préciser la courbe de f seulement à gauche du point d'abscisse 1. Considérons le prolongement par continuité g de f à gauche de 1.

On a : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ pour } x \in D_f \\ g(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = e \end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{e^{\frac{1}{\operatorname{Log} x}} + e^{\frac{1}{x}} - e}{x-1}$

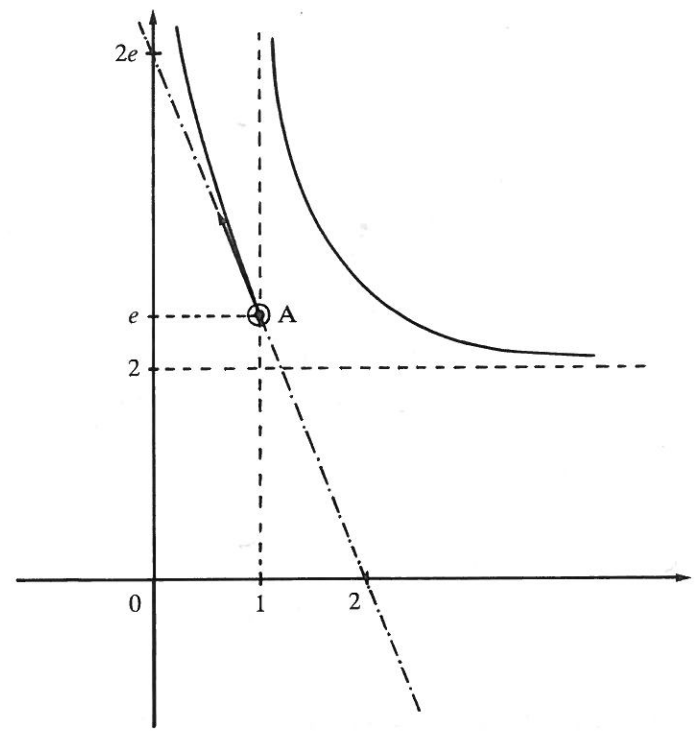
$= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{e^{\frac{1}{\operatorname{Log} x}}}{x-1} + \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e}{x-1} = 0 - e = -e$ (voir 2)).

Par suite : g est dérivable à gauche de 1 et sa dérivée à gauche est $-e$.
Donc la courbe de g admet à gauche du point $A\ (1\ , g(1) = A\ (1\ , e)$ une demi tangente de pente $-e$.

4) L'équation de cette demi tangente est :

$y = g(1) + (x-1)\, g'_g(1)$
$\ \ = e + (x-1)(-e)$
$\ \ = -e\,x + 2\,e$

$A \notin (C_f)$.



Solutions

1) $X = e^x \Leftrightarrow x = \text{Log}\,X$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{(\text{Log}\,X)^2} = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{X}}{2\,\text{Log}\sqrt{X}}\right)^2$

$$= \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{X}}{\text{Log}\sqrt{X}}\right)^2 = +\infty$$

Autre méthode : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\,\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = +\infty$

2) $D_f = \mathbb{R}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = \dfrac{e^x\sqrt{1+e^x}}{1+e^x} = \dfrac{e^x\sqrt{1+e^x}}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)} = \dfrac{\sqrt{1+e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+e^x}}{\frac{1}{e^x}+1} = \dfrac{+\infty}{0+1} = +\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+e^x}}{x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{1+e^x}}{x}}{\frac{1}{e^x}+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{e^x}{x^2}}}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

car d'après la question 1) on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Conclusion : la courbe (C_f) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

4) $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \dfrac{e^x(2+e^x)}{2(1+e^x)\sqrt{1+e^x}} > 0$.

En plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} = \dfrac{0}{1} = 0$. Donc :

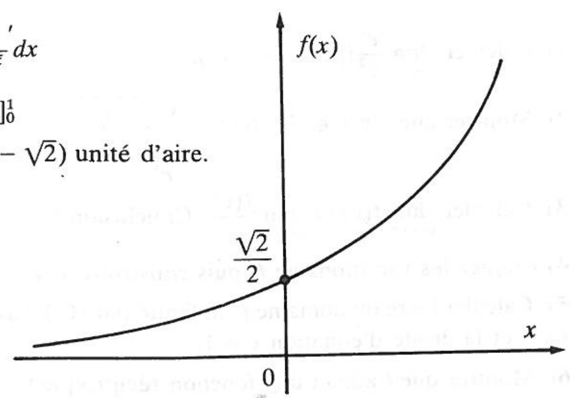
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Point particulier : $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}7$.

5) $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{(1+e^x)'}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

$= [2\sqrt{1+e^x}]_0^1$

$= 2(\sqrt{1+e} - \sqrt{2})$ unité d'aire.



6) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$. Donc f admet une fonction réciproque $f^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in]0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Or : $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = \dfrac{e^y}{\sqrt{1+e^y}} \Leftrightarrow x\sqrt{1+e^y} = e^y \Leftrightarrow x^2(1+e^y) = e^{2y}$

$\Leftrightarrow e^{2y} - x^2e^y - x^2 = 0$. C'est une équation du second degré en e^y.
Son discriminant est $\Delta = x^4 + 4x^2 > 0$ car $x \in]0, +\infty[$.

D'où : elle admet 2 solutions telles que : $e^y = \dfrac{x^2 + x\sqrt{x^2+4}}{2} > 0$ (donc convient)

ou $e^y = \dfrac{x^2 - x\sqrt{x^2+4}}{2} < 0$ (donc ne convient pas car $e^y > 0$).

Par suite : $e^y = \dfrac{x^2 + x\sqrt{x^2+4}}{2} \Leftrightarrow y = \text{Log}\,\dfrac{x^2 + x\sqrt{x^2+4}}{2} = f^{-1}(x)$

EXERCICE 9

Soit $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1) Étudier les variations de f.

2) Montrer que la courbe (C_f) admet un seul point d'inflexion I.
En déduire l'étude de la concavité de (C_f).

3) Montrer que ce point d'inflexion I est un centre de symétrie pour la courbe (C_f).

4) Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point I.
Construire cette tangente et la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

5) Calculer l'aire en cm² de la portion du plan comprise entre (c_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$ (On donne l'unité égale à 2 cm).

6) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, et déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$.

Solutions

1) $D_f = \mathbb{R}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{0}{1+0} = 0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{e^x}+1} = \dfrac{1}{0+1} = 1$.

Donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

2) $(\forall x \in \mathbb{R}) : f''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

Donc (C_f) admet un seul point d'inflexion $I(0, f(0))$ avec $f(0) = \frac{1}{2}$.

En plus : la concavité de (C_f) est tournée vers les y positifs pour $x \in]-\infty, 0[$, et vers les y négatifs pour $x \in]0, +\infty[$.

3) On a : $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Posons : $\begin{cases} X = x - 0 \\ Y = y - \frac{1}{2} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} x = X \\ y = Y + \frac{1}{2} \end{cases}$.

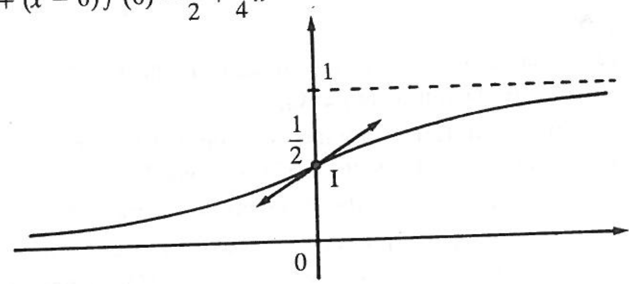
Donc : $y = f(x) \Leftrightarrow Y + \frac{1}{2} = f(X) = \dfrac{e^X}{1+e^X} \Leftrightarrow Y = \dfrac{e^X}{1+e^X} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^X - 1}{2(1+e^X)} = F(X)$.

$D_F = \mathbb{R}$; $(\forall X \in \mathbb{R})$, $-X \in \mathbb{R}$ et :

$$F(-X) = \frac{e^{-X}-1}{2(1+e^{-X})} = \frac{\frac{1}{e^X}-1}{2\left(1+\frac{1}{e^X}\right)} = \frac{\frac{1-e^X}{e^X}}{2\,\frac{e^X+1}{e^X}} = \frac{1-e^X}{2(e^X+1)} = -F(X).$$

Donc F est impaire. Donc le point $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour (C_f).

4) $y = f(0) + (x-0)f'(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$



5) $$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}\,dx = [\operatorname{Log}(1+e^x)]_{-1}^{1}$$
$$= \operatorname{Log}(1+e) - \operatorname{Log}(1+e^{-1}) = \operatorname{Log}\frac{1+e}{1+e^{-1}} = \operatorname{Log}\frac{1+e}{1+\frac{1}{e}} = \operatorname{Log}\frac{1+e}{\frac{e+1}{e}}$$
$= \operatorname{Log} e = 1$ unité d'aire $= 4\ \text{cm}^2$.

6) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0, 1[$. Donc elle admet une fonction réciproque $f^{-1} :]0, 1[\to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in]0, 1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Or : $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = \dfrac{e^y}{1+e^y} \Leftrightarrow x + x\,e^y = e^y \Leftrightarrow x = e^y(1-x)$.

$$\Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x} > 0 \ (\text{car } x \in]0, 1[) \Leftrightarrow y = \operatorname{Log}\frac{x}{1-x} = f^{-1}(x).$$

Conclusion : $(\forall x \in]0, 1[) : f^{-1}(x) = \operatorname{Log}\dfrac{x}{1-x}$.

EXERCICE 10

Soit f définie par $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$ pour $x \neq -1$ et $f(-1) = 0$.

1) Étudier la continuité de f en $x_0 = -1$.

2) Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$.

3) Étudier les variations de f. Calculer $f(1)$.
Construire la courbe représentative de f.

4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
Construire la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que (C_f).

5) a) Calculer le nombre dérivé de f^{-1} en 1 c. à d. $(f^{-1})'(1)$.
b) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$.

Solutions

1) f est définie lorsque : $x \neq -1$. Mais $-1 \in D_f$ car $f(-1) = 0$. Donc : $D_f = \mathbb{R}$.
D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim\limits_{u \to +\infty} e^u = +\infty$.

Et : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim\limits_{u \to -\infty} e^u = 0 = f(-1)$.

Donc : f est continue à droite en -1, mais elle n'est pas continue à gauche en -1.

2) f n'est pas continue à gauche en -1, donc elle n'est pas dérivable à gauche en -1. Mais f est continue à droite en -1. On cherche alors si f est dérivable à droite en -1. On a :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1}{x+1}\, e^{\frac{x-1}{x+1}} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{x-1}{x+1}\, e^{\frac{x-1}{x+1}}\, \frac{1}{x-1}$$
$$= \lim_{u \to -\infty} u\, e^u \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1}{x-1} = 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Conclusion : f est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1) = 0$.
Par suite : la courbe (c_f) admet au point $A(-1, 0)$ une demi tangente parallèle à l'axe $x'x$.

3) $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) : f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}\, e^{\frac{x-1}{x+1}} > 0$.

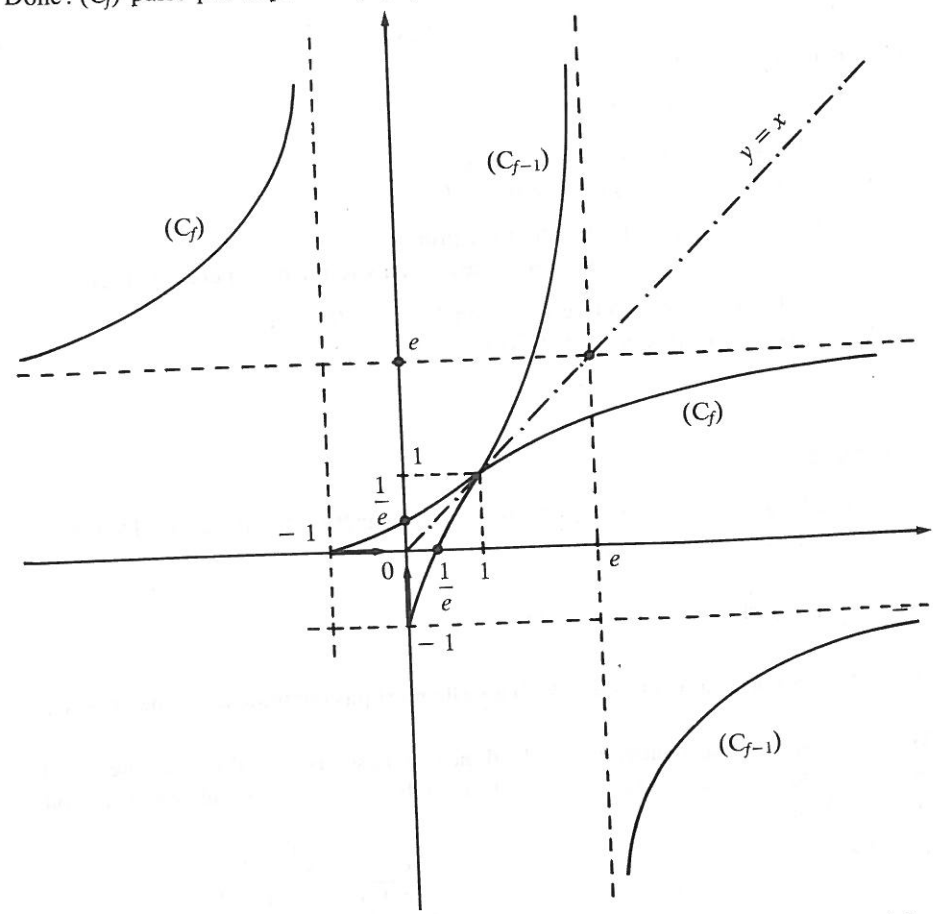
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{u \to 1} e^u = e$. Donc la droite d'équation $y = e$ est asymptote à (C_f) quand $x \to -\infty$ et quand $x \to +\infty$.

D'où :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖ 0	$+$	
$f(x)$	e	↗	$+\infty$ ‖ 0	↗	e

En plus : $f(1) = e^0 = 1$

Donc : (C_f) passe par le point B $(1 , 1)$.



4) f est continue et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty , -1[$ et $[-1 , +\infty[$. L'ensemble de ses valeurs est $]e , +\infty[\cup [0 , e[= [0 , +\infty[-\{e\}$. Par conséquent, f est une bijection de $]-\infty , -1[\cup [-1 , +\infty[= \mathbb{R}$ vers $[0 , +\infty[-\{e\}$. Elle admet donc une fonction réciproque $f^{-1} : [0 , +\infty[-\{e\} \to \mathbb{R}$ dont le tableau de variation est :

x	0		e		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

La courbe représentative $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1} se déduit de (C_f) dans une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

5) a) $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(y)}$ avec $y = f^{-1}(1) \Leftrightarrow 1 = f(y) = e^{\frac{y-1}{y+1}}$

Or : $1 = e^{\frac{y-1}{y+1}} \Leftrightarrow \dfrac{y-1}{y+1} = 0 \Leftrightarrow y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1.$

D'où : $f'(y) = f'(1) = \dfrac{2}{(1+1)^2} e^o = \dfrac{1}{2}$. Par suite : $(f^{-1})'(1) = 2.$

b) $\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in [0 , +\infty[-\{e\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Pour $x \in [0 , +\infty[-\{e\}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a :

$$x = f(y) \Leftrightarrow x = e^{\frac{y-1}{y+1}} \Leftrightarrow \frac{y-1}{y+1} = \text{Log}\, x \Leftrightarrow y - 1 = y\, \text{Log}\, x + \text{Log}\, x.$$

$$\Leftrightarrow y - y\, \text{Log}\, x = 1 + \text{Log}\, x \Leftrightarrow y = \frac{1 + \text{Log}\, x}{1 - \text{Log}\, x} = f^{-1}(x).$$

En plus on a : $f(-1) = 0 \Leftrightarrow -1 = f^{-1}(0)$.

Conclusion : f^{-1} est définie par : $\begin{cases} f^{-1}(0) = -1 \text{ et} \\ f^{-1}(x) = \dfrac{1 + \text{Log}\, x}{1 - \text{Log}\, x} \text{ pour } x \in]0 , +\infty[-\{e\}. \end{cases}$

EXERCICE 11

Soit f définie par $f(0) = -1$ et $f(x) = e^x (x\, \text{Log}\,|x| - 1)$ pour $x \neq 0$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$.

2) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

3) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

4) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

5) Déterminer le tableau de variation de f.

6) Etudier les branches infinies de (C_f).

7) Montrer que f s'annule en $\lambda \in \left]\frac{3}{2} , 2\right[$.
(on donne : $\text{Log}\, 2 \simeq 0{,}7$ et $\text{Log}\, 3 \simeq 1{,}1$)

8) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Solutions

1) f est définie pour $|x| > 0$ c'est-à-dire $x \neq 0$. Mais $f(0) = -1$.

Par suite : $D_f = \mathbb{R}$. D'autre part on a :

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x (x\, \text{Log}\,|x| - 1) = 1(0 - 1) = -1 = f(0)$.

Donc : f est continue en $x_0 = 0$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x (x\, \text{Log}\,|x| - 1) + 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x x\, \text{Log}\,|x| - e^x + 1}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} e^x\, \text{Log}\,|x| - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = -\infty - 1 = -\infty.$

Donc : f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$; mais la courbe (C_f) admet au point A$(0 , -1)$ une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche parallèle à l'axe $y'y$.

3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x) = e^x\,[(x+1)\operatorname{Log}|x|]$.

$f'(x)$ a donc le signe de $(x+1)\operatorname{Log}|x|$.

D'où :

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\operatorname{Log}\|x\|$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x\,(x\operatorname{Log}|x|-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x\,x\operatorname{Log}|x| - e^x$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\,\frac{\operatorname{Log}|x|}{x} - e^x\right) = \lim_{x\to-\infty}(x^2e^x)\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{Log}|x|}{x} - \lim_{x\to-\infty} e^x$$

Mais : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2e^x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\,e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2\,\frac{x}{2}\,e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim\limits_{t\to-\infty}(2t\,e^t)^2 = (2\times 0)^2 = 0$

De même : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\operatorname{Log}|x|}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\operatorname{Log}(-x)}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{\operatorname{Log} t}{t}\right) = 0.$

Enfin : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0\times 0 - 0 = 0$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Donc :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↘	-1	↘	$-e$	↗	$+\infty$

6; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; par suite, la droite d'équation $y = 0$ (l'axe $x'x$) est asymptote à (C_f) quand $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}(x\operatorname{Log}|x|-1) = +\infty\,(+\infty) = +\infty$.

Donc : (C_f) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe $y'y$.

7) f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

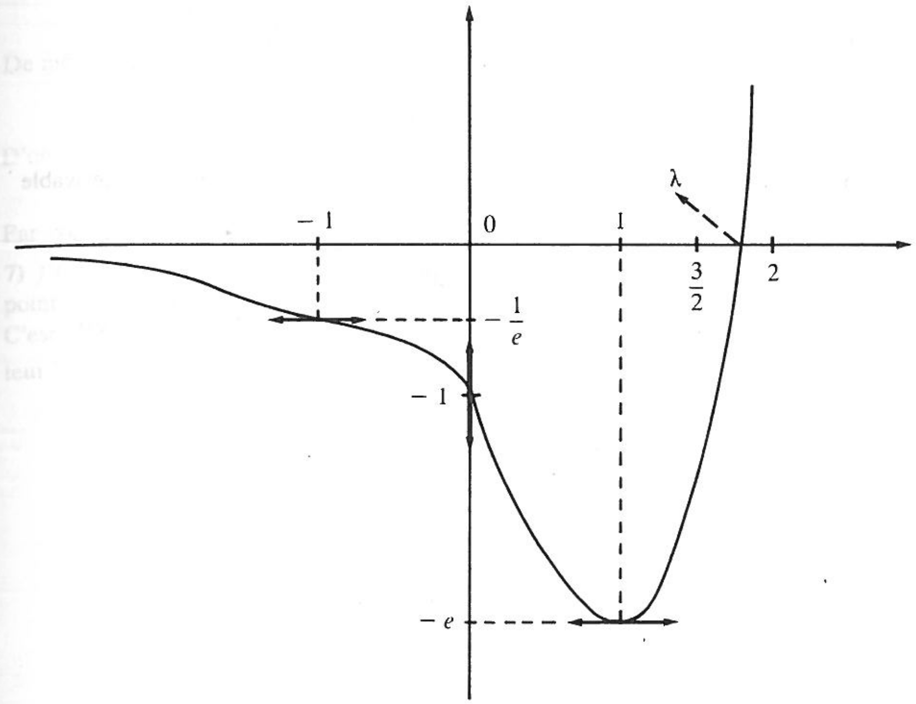
En plus : $f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\operatorname{Log}\frac{3}{2} - 1\right)$.

Mais : $\frac{3}{2}\operatorname{Log}\frac{3}{2} = \frac{3}{2}(\operatorname{Log}3 - \operatorname{Log}2) \simeq 0{,}6$.

Donc : $f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq e^{\frac{3}{2}}(0{,}6-1) = e^{\frac{3}{2}}(-0{,}4) < 0$.

Et : $f(2) = e^2\,(2\operatorname{Log}2 - 1) \simeq e^2\,(0{,}4) > 0$.

Ces 3 résultats impliquent qu'il existe λ unique $\in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$ tel que $f(\lambda) = 0$.



PROBLÈME 1

Soit f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{x^2 - x + \operatorname{Log}|x|}$ pour $x \neq 0$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
   Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
2) f est-elle dérivable en $x_0 = 0$? Préciser les tangentes à (C_f) au point 0.
3) Étudier les variations de f.
4) Étudier les branches infinies de (C_f).
5) Pour $x > 0$, étudier la position de (C_f) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.
6) Pour $x < 0$, étudier la position de (C_f) par rapport à la droite (Δ') d'équation $y = -x$.
7) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à (C_f) au point A $(1, 1)$.
   Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Solutions

1) $\operatorname{Log}|x|$ est définie pour $x \in \mathbb{R}^*$; par suite, f est définie pour $x \in \mathbb{R}^*$.
En plus $0 \in D_f$ car $f(0) = 0$. Donc : $D_f = \mathbb{R}$.
D'autre part : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0 = f(0)$.
Par conséquent : f est continue en $x_0 = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{e^{x^2-x+\text{Log}\,x}}{e^{\text{Log}\,x}} = \lim\limits_{x\to 0_+} e^{x^2-x} = 1 = f'_d(0)$.

De même :

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0_-} \frac{e^{x^2-x+\text{Log}(-x)}}{x} = \lim_{x\to 0_-} - \frac{e^{x^2-x+\text{Log}(-x)}}{-x}$$

$$= \lim_{x\to 0_-} - \frac{e^{x^2-x+\text{Log}(-x)}}{e^{\text{Log}(-x)}} = \lim_{x\to 0_-} (-e^{x^2-x}) = -1 = f'_g(0)$$

Conclusion : f est dérivable à droite et à gauche en $x_0 = 0$ mais elle n'est pas dérivable en $x_0 = 0$ car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.
La courbe (C_f) admet donc au point O une demi tangente à droite d'équation $y = x$ et une demi tangente à gauche d'équation $y = -x$.

3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x) = \left(2x - 1 + \dfrac{1}{x}\right) e^{x^2-x+\text{Log}|x|} = \dfrac{2x^2-x+1}{x} e^{x^2-x+\text{Log}|x|}$

Considérons $2x^2 - x + 1$. On a : $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$.
Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x^2 - x + 1 > 0$.
Par suite : $f'(x)$ a le signe de x . D'autre part on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(x-1+\frac{\text{Log}\,x}{x}\right)} = \lim_{u\to+\infty} e^u = +\infty .$$

$$\text{Et : } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x\left(x-1-\frac{\text{Log}(-x)}{-x}\right)} = \lim_{u\to+\infty} e^u = +\infty .$$

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	-1 ‖ 1	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2-x+\text{Log}\,x}}{e^{\text{Log}\,x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2-x} = +\infty$.

Donc : (C_f) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe $y'y$.

De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[- \dfrac{e^{x^2-x+\text{Log}(-x)}}{-x}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[- \dfrac{e^{x^2-x+\text{Log}(-x)}}{e^{\text{Log}(-x)}}\right]$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-e^{x^2-x}) = \lim_{u\to+\infty} (-e^u) = -\infty .$$

Donc : (C_f) admet encore, pour x tendant vers $-\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe $y'y$.

5) Pour $x > 0$ on a : $f(x) - x = e^{x^2-x+\text{Log}\,x} - x$; et par suite :
$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - x + \text{Log}\,x = \text{Log}\,x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ car $x > 0$
De même : $f(x) - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > x \Leftrightarrow x^2 - x + \text{Log}\,x > \text{Log}\,x \Leftrightarrow x^2 - x > 0$
$\Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$.

car $x > 0$. D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - x$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent : sur $[0, 1]$, (C_f) est au-dessous de (Δ) .
Et sur $[1, +\infty[$, (C_f) est au-dessus de (Δ) .
Enfin (C_f) coupe (Δ) au point O et au point A $(1, 1)$.

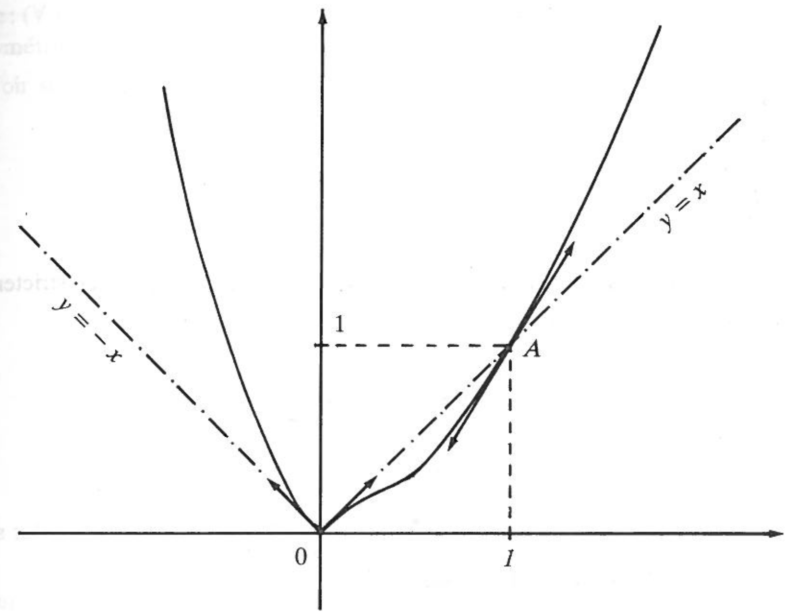
6) Pour $x < 0$ on a : $f(x) + x = e^{x^2-x+\text{Log}(-x)} + x$; et par suite :
$f(x) + x = 0 \Leftrightarrow e^{x^2-x+\text{Log}(-x)} = -x \Leftrightarrow x^2 - x + \text{Log}(-x) = \text{Log}(-x)$
car $-x > 0$.
$\Leftrightarrow x^2 - x = 0$. Cette équation n'a pas de solution pour $x < 0$.
De même : $f(x) + x > 0 \Leftrightarrow e^{x^2-x+\text{Log}(-x)} > -x \Leftrightarrow x^2 - x + \text{Log}(-x) > \text{Log}(-x)$
$\Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 0[$ car $x < 0$.

D'où :

x	$-\infty$		0
$f(x) + x$		$+$	0

Par conséquent : $(\forall x \in]-\infty, 0[) : (C_f)$ est au-dessus de (Δ') .

7) $f'(1) = 2$. Par suite, (C_f) admet au point A $(1, 1)$ une tangente de pente 2 . C'est une droite qui est portée par le vecteur $\vec{V}(1, 2)$.



PROBLÈME 2

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{2\,e^{2x}}{e^{2x}+1} - x$. On donne : $e \approx 2,7$.

1) Étudier les variations de f .
2) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha \in \left]\dfrac{3}{2}, 2\right[$.
3) Étudier $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x]$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) + x]$; interpréter géométriquement les résultats obtenus.
4) Montrer que le point I $(0, 1)$ est un centre de symétrie pour (C_f) .
5) Construire (C_f) dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

6) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par (C_f), la droite d'équation $y = -x + 2$, l'axe $y'y$ et la droite d'équation $x = 1$.

7) Étudier et représenter graphiquement, dans un autre repère orthonormé, les variations de $g(x) = \text{Log}\left(\dfrac{2\,e^{2x}}{e^{2x}+1} - x\right)$.

Solutions

1) $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^{2x} + 1 > 0$; donc : $D_f = \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1 + \dfrac{1}{e^{2x}}} - x = 2 - (+\infty) = -\infty .$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \frac{-(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} \leqslant 0 .$$

En plus : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$

2) D'après le tableau de variation de f, on voit que f est continue et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$. En plus :

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\,e^3}{e^3+1} - \frac{3}{2} = \frac{e^3 - 3}{2\,(e^3+1)} > 0 \text{ car } e^3 \simeq (2{,}7)^3 > 3 .$$

$$f(2) = \frac{2\,e^4}{e^4+1} - 2 = \frac{-2}{e^4+1} < 0 .$$

Ces 3 résultats impliquent qu'il existe α unique $\in \left]\dfrac{3}{2}, 2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Par suite, (C_f) coupe l'axe $x'x$ au point d'abscisse α.

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2\,e^{2x}}{e^{2x}+1} = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$.

Donc : la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_f) quand $x \to -\infty$.

De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\,e^{2x}}{e^{2x}+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{1 + \dfrac{1}{e^{2x}}} = 2$

Donc : la droite d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C_f) quand $x \to +\infty$.

4) Posons : $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} x = X \\ y = Y + 1 \end{cases}$.

D'où : $y = f(x) \Leftrightarrow Y + 1 = f(X) = \dfrac{2\,e^{2X}}{e^{2X}+1} - X \Leftrightarrow Y = \dfrac{2\,e^{2X}}{e^{2X}+1} - 1 - X = F(X)$.

$D_F = \mathbb{R}$. Il suffit de démontrer que F est impaire.

1^ere^ méthode : $D_F = \mathbb{R}$; $(\forall X \in \mathbb{R})$, $-X \in \mathbb{R}$ et on a :

$$F(-X) + F(X) = \frac{2\,e^{-2X}}{e^{-2X}+1} + \frac{2\,e^{2X}}{e^{2X}+1} - 2 = \frac{2}{1+e^{2X}} + \frac{2\,e^{2X}}{e^{2X}+1} - 2 = 2 - 2 = 0 .$$

Donc : $F(-X) = -F(X)$; et par suite F est impaire.

2^e^ méthode : $F(X) = \dfrac{2\,e^{2X}}{e^{2X}+1} - 1 - X = \dfrac{e^{2X}-1}{e^{2X}+1} - X$.

Donc : $F(-X) = \dfrac{e^{-2X}-1}{e^{-2X}+1} + X = \dfrac{1 - e^{2X}}{1 + e^{2X}} + X = -F(X)$. Donc F est impaire.

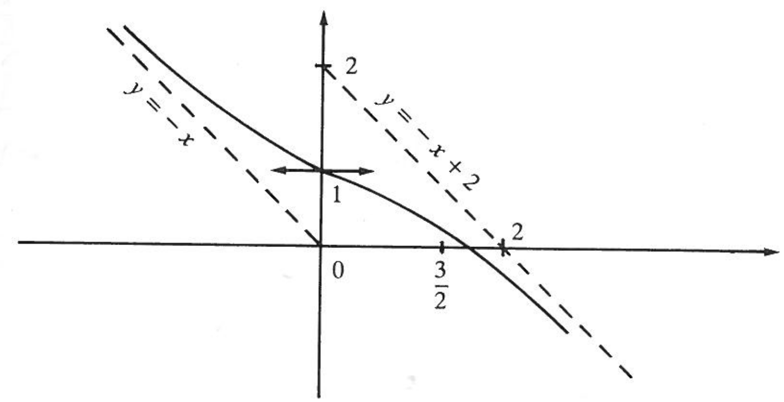
Remarque : Il y a une autre méthode sans faire un changement d'axes.
Il suffit de démontrer que $(\forall x \in D_f) : f(0 - x) = 2 - f(x)$. En effet on a :

$$f(0 - x) = f(-x) = \frac{2\,e^{-2x}}{e^{-2x}+1} + x = \frac{2}{1 + e^{2x}} + x$$

$$2 - f(x) = 2 - \frac{2\,e^{2x}}{e^{2x}+1} + x = \frac{2\,e^{2x} + 2 - 2\,e^{2x}}{e^{2x}+1} + x = \frac{2}{e^{2x}+1} + x$$

Donc : $(\forall x \in D_f) : f(0 - x) = 2 - f(x)$. Et par suite, le point I $(0, 1)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_f).

5) Voir schéma.



6) Sur $[0, 1]$, (C_f) se trouve au-dessous de la droite d'équation $y = -x + 2$.

Donc : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 (-x + 2 - f(x))\,dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{2\,e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) dx$

$= [2x - \text{Log}\,(e^{2x}+1)]_0^1 = 2 - \text{Log}\,(e^2+1) + \text{Log}\,2$ unité d'aire.

7) On remarque que $g(x) = \text{Log} f(x)$. Par suite, g est définie lorsque : $f(x) > 0$.

Mais le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$

avec $\alpha \in \left]\dfrac{3}{2}, 2\right[$.

D'où : $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \alpha[$. Par conséquent : $D_g =]-\infty, \alpha[$.

$(\forall x \in D_g) : g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ du signe de $f'(x)$ car $f(x) > 0$ sur D_g .

En plus : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{u \to +\infty} \text{Log}\, u = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} g(x) = \lim\limits_{u \to 0_+} \text{Log}\, u = -\infty$.

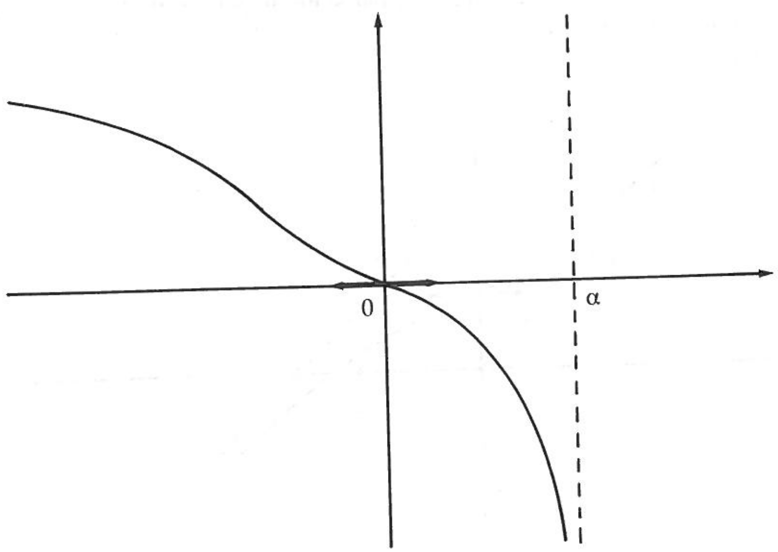
D'où :

x	$-\infty$	0	α
$g'(x)$	$-$	0	$\Vert$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$ $\Vert$

car $g(0) = \text{Log}\, f(0) = \text{Log}\, 1 = 0$.

Enfin : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\text{Log}\, f(x)}{f(x)} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{\text{Log}\, u}{u} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2}{x} \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1\right)$
$= 0 \times (0 \times 0 - 1) = 0$.

Donc (C_g) admet, pour x tendant vers $-\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe $x'x$.



PROBLÈME 3

1) Soit f définie par $f(x) = \text{Log}\, |e^x - e^{2x}|$. Déterminer D_f .

2) Étudier les variations de f .

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x]$. Conclusion.

b) Préciser la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = 2x$ pour $x \in]0, +\infty[$.

4) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x]$. Conclusion ?

b) Préciser la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = x$ pour $x \in]-\infty, 0[$.

5) On donne : $e \simeq 2{,}718$ et $\sqrt{e} \simeq 1{,}648$.
Montrer que f s'annule en $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. Construire (C_f) .

6) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $]0, +\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} . Construire (C_g) et (C_{g-1}) dans un même repère orthonormé. Préciser l'asymptote oblique à (C_{g-1}) .

7) Calculer le nombre dérivé de g^{-1} en 1 c'est-à-dire $(g^{-1})'(1)$.

8) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$.

Solutions

1) f est définie lorsque $|e^x - e^{2x}| > 0$ c'est-à-dire $e^x - e^{2x} \neq 0$.
On a : $e^x - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^x(1 - e^x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
D'où : $D_f = \mathbb{R}^*$.

2) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x) = \dfrac{e^x - 2e^{2x}}{e^x - e^{2x}} = \dfrac{1 - 2e^x}{1 - e^x} = \dfrac{2e^x - 1}{e^x - 1}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{u \to 0_+} \text{Log}\, u = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{u \to 0_+} \text{Log}\, u = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{u \to +\infty} \text{Log}\, u = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} |e^x - e^{2x}| = \lim e^x\, |1 - e^x|$
$= +\infty(+\infty) = +\infty$.

D'où :

x	$-\infty$		$-\text{Log}\, 2$		0		$+\infty$
$2e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\text{Log}\, 4$	↘	$-\infty$ $\Vert$ $-\infty$	↗	$+\infty$

car $f(-\text{Log}\, 2) = f\left(\text{Log}\dfrac{1}{2}\right)$
$= \text{Log}\left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right|$
$= \text{Log}\dfrac{1}{4} = -\text{Log}\, 4$.

3) a) $e^x - e^{2x} = e^x(1 - e^x)$ a le signe de $1 - e^x$.

Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - e^{2x}$		$+$	0	$-$	

D'où : $|e^x - e^{2x}| = \begin{cases} e^x - e^{2x} \text{ pour } x \in]-\infty, 0[\\ e^{2x} - e^x \text{ pour } x \in]0, +\infty[\end{cases}$

Par conséquent : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x \to +\infty} [\text{Log}(e^{2x} - e^x) - \text{Log}\, e^{2x}]$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log}\dfrac{e^{2x} - e^x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log}\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)$
$= \text{Log}\, 1 = 0$.

Conclusion : la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C_f) quand $x \to +\infty$.

b) D'après a) , $(\forall x \in]0, +\infty[) : f(x) - 2x = \text{Log}\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)$.

Mais : $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{e^x} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\dfrac{1}{e^x} < 0 \Leftrightarrow 0 < 1 - \dfrac{1}{e^x} < 1$
$\Leftrightarrow \text{Log}\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) - 2x < 0$.

Donc : sur $]0, +\infty[$, (C_f) est située au-dessous de son asymptote $y = 2x$.

Autre méthode : $(\forall x \in]0, +\infty[) : f(x) - 2x = \text{Log}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$. Donc :

$f(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e^x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = 0$ impossible car $e^x > 0$

$f(x) - 2x > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e^x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} < 0$ impossible car $e^x > 0$.

Donc : $(\forall x \in]0, +\infty[) : f(x) - 2x < 0$.

4) a) D'après 3) a) on a : $(\forall x \in]-\infty, 0[) : f(x) - x = \text{Log}(e^x - e^{2x}) - \text{Log}\, e^x =$ $\text{Log}\frac{e^x - e^{2x}}{e^x} = \text{Log}(1 - e^x)$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to -\infty} \text{Log}(1 - e^x)$ $= \text{Log}\, 1 = 0$

Conclusion : la droite d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) quand $x \to -\infty$.

b) D'après a) on a : $(\forall x \in]-\infty, 0[) : f(x) - x = \text{Log}(1 - e^x)$.

Mais : $x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1 \Leftrightarrow -1 < -e^x < 0 \Leftrightarrow 0 < 1 - e^x < 1$
$\Leftrightarrow \text{Log}(1 - e^x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - x < 0$.

Donc : sur $]-\infty, 0[$, (C_f) se trouve au-dessous de son asymptote $y = x$.

Autre méthode : $(\forall x \in]-\infty, 0[) : f(x) - x = \text{Log}(1 - e^x)$. Donc :

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = 0$ impossible.

$f(x) - x > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 1 \Leftrightarrow e^x < 0$ impossible.

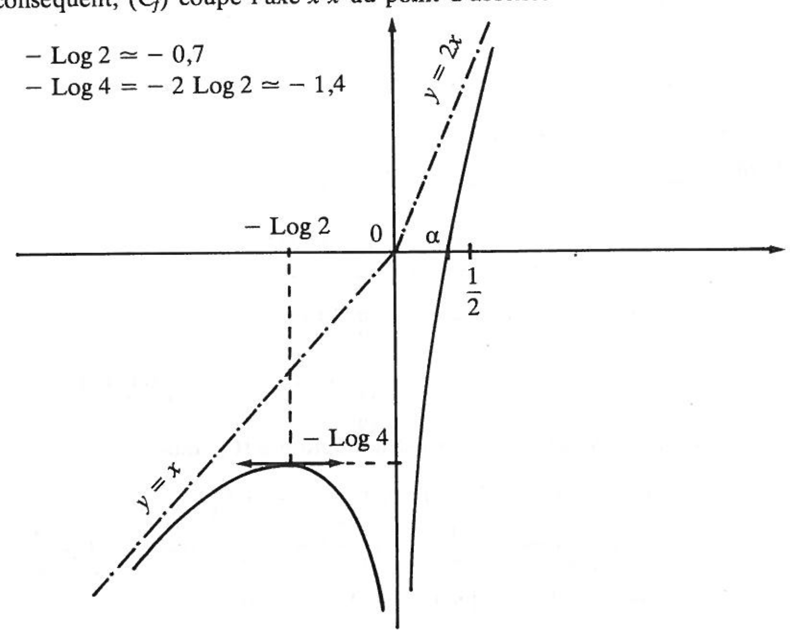
Donc : $(\forall x \in]-\infty, 0[) : f(x) - x < 0$.

5) f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

En plus : $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = -\infty$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Log}\,|\sqrt{e} - e| \simeq \text{Log}\,|1{,}648 - 2{,}718|$ $\simeq \text{Log}(1{,}07) > 0$.

Ces 3 résultats impliquent qu'il existe α unique $\in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Par conséquent, (C_f) coupe l'axe $x'x$ au point d'abscisse α.



6) g n'est autre que la fonction f pour $x \in]0, +\infty[$.

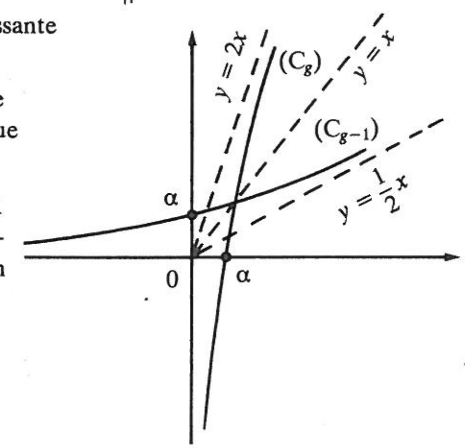
D'après le tableau de variation de f on a donc :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Donc : g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Elle admet donc une fonction réciproque $g^{-1} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ qui est aussi continue et strictement croissante.

La courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de $g - 1$ se déduit de (C_g) dans une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.



7) $(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(y)}$ avec $y = g^{-1}(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = g(y) = f(y) = \text{Log}\,|e^y - e^{2y}| \\ y \in]0, +\infty[\end{cases}$

Pour $y \in]0, +\infty[$ on a :

$1 = \text{Log}\,|e^y - e^{2y}| = \text{Log}(e^{2y} - e^y) \Leftrightarrow e^{2y} - e^y = e \Leftrightarrow (e^y)^2 - e^y - e = 0$.

C'est une équation du second degré en e^y. On a : $\Delta = 1 + 4e > 0$.

D'où : $e^y = \frac{1 + \sqrt{1 + 4e}}{2} > 0$ (donc convient car $e^y > 0$)

ou $e^y = \frac{1 - \sqrt{1 + 4e}}{2} < 0$ (donc ne convient pas car $e^y > 0$).

Par suite : $y = \text{Log}\frac{1 + \sqrt{1 + 4e}}{2}$.

Donc $g'(y) = f'(y) = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4e} - 1}{\frac{1 + \sqrt{4e}}{2} - 1} = \dfrac{2\sqrt{1 + 4e}}{\sqrt{1 + 4e} - 1}$

Donc : $(g^{-1})'(1) = \dfrac{\sqrt{1 + 4e} - 1}{2\sqrt{1 + 4e}} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{1 + 4e}}{1 + 4e}\right)$.

8) $\begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x = g(y) = f(y) \\ y \in]0, +\infty[\end{cases}\right\} \Leftrightarrow x = \text{Log}(e^{2y} - e^y)$

$\Leftrightarrow e^{2y} - e^y = e^x \Leftrightarrow (e^y)^2 - e^y - e^x = 0$. C'est une équation du second degré en e^y. On a : $\Delta = 1 + 4e^x > 0$. D'où :

$e^y = \frac{1 + \sqrt{1 + 4e^x}}{2} > 0$ (donc convient)

ou $e^y = \frac{1 - \sqrt{1 + 4e^x}}{2} < 0$ (donc ne convient pas car $e^y > 0$).

Donc : $y = \text{Log}\frac{1 + \sqrt{1 + 4e^x}}{2}$. Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g^{-1}(x) = \text{Log}\frac{1 + \sqrt{1 + 4e^x}}{2}$

PROBLÈME 4

Soit f définie par $f(1) = 0$ et

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} \text{ pour } x \in \,]-\infty\,,1\,[\\ f_2(x) = e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1-x}} - e \text{ pour } x \in \,]\,1\,,+\infty\,[\end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$.

2) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.

3) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.

4: Etudier les variations de f.

5) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

6) Calculer l'aire du domaine plan limité par (C_f), l'axe $x'x$, l'axe $y'y$ et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

Solutions

1) f_1 est continue sur $]-\infty\,,1\,[$ et f_2 est continue sur $]\,1\,,+\infty\,[$.

En plus : $$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f_1(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \left(\frac{1}{x-1} e^{\frac{1}{2(x-1)}}\right)^2$$

$$= \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \left(2\,\frac{1}{2(x-1)} e^{\frac{1}{2(x-1)}}\right)^2 = \lim_{t\to-\infty} (2\,t\,e^t)^2 = (2\times 0)^2 = 0 = f(1)$$

De même : $$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f_2(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1-x}} - e = e - 0 - e = 0 = f(1)$$

car $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0.$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to1} f(x) = 0 = f(1)$. Donc : f est continue en $x_0 = 1$.

2) f est continue en $x_0 = 1$. On cherche donc si f est dérivable en $x_0 = 1$.

On a : $$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{f_1(x)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{1}{(x-1)^3} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \left(\frac{1}{x-1} e^{\frac{1}{3(x-1)}}\right)^2$$

$$= \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \left(3\,\frac{1}{3(x-1)} e^{\frac{1}{3(x-1)}}\right)^2 = \lim_{t\to-\infty} (3\,t\,e^t)^3 = (3\times 0)^3 = 0 = f'_g(1)$$

De même : $$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{f_2(x)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1-x}} - e}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e}{x-1} + \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$$

Si on pose $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ on aura : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1)$

Mais $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$; donc : $g'(1) = -e$; par suite : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e}{x-1} = -e$

D'autre part : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{t\to-\infty} t\,e^t = 0.$

Donc : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -e + 0 = -e = f'_d(1).$

Conclusion : f est dérivable à gauche et à droite en 1, mais elle n'est pas dérivable en 1 car on a : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$.

3) f_1 est dérivable sur $]-\infty\,,1\,[$ et f_2 est dérivable sur $]\,1\,,+\infty\,[$.
La fonction dérivée f' de f est donc définie par :

$$f'(x) = \begin{cases} f'_1(x) = \dfrac{1-2x}{(x-1)^4} e^{\frac{1}{x-1}} \text{ pour } x \in \,]-\infty\,,1\,[\,. \\ f'_2(x) = -\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}} \text{ pour } x \in \,]\,1\,,+\infty\,[\,. \end{cases}$$

$f'_1(x)$ a le signe de $1-2x$. Mais $f'_2(x) < 0$ pour tout $x \in \,]\,1\,,+\infty\,[$.

Donc :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0 ‖ $-e$	$-$	

4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 0 \times 1 = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 1 - 1 - e = -e.$

D'où :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0 ‖ $-e$	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↘	$-e$

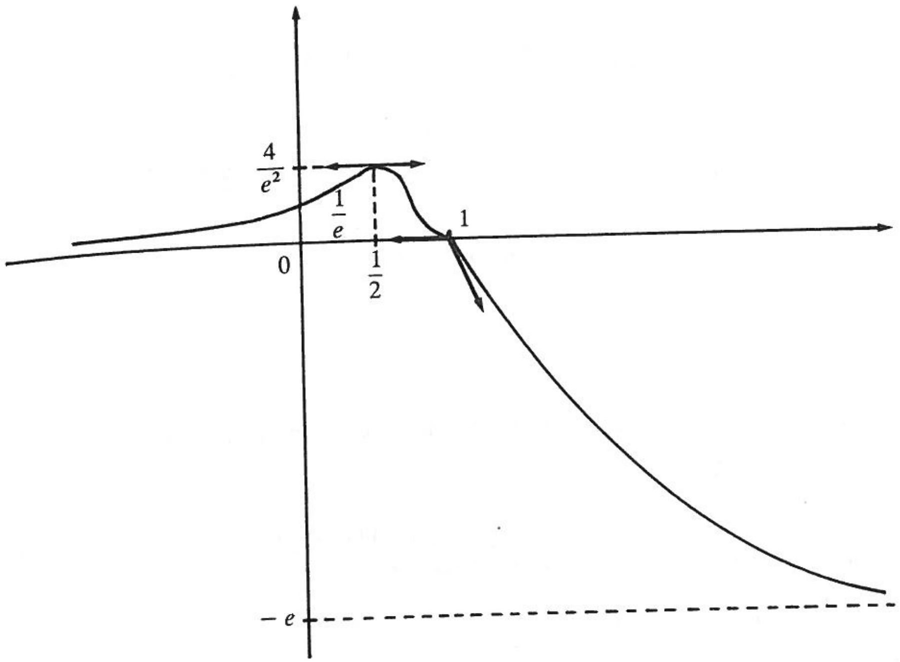
Car $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{e^2}$

5) On a : $e \simeq 2,7$. Donc :

$\dfrac{4}{e^2} \simeq 0,55$

En plus :

$f(0) = f_1(0) = \dfrac{1}{e} \simeq 0,37$.



6) $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f_1(x)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x-1)^2}\, e^{\frac{1}{x-1}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{-1}{x-1}}\right)'\,dx = = \left[e^{\frac{-1}{x-1}}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \text{ unité d'aire .}$$

PROBLÈME 5

Soit f définie par : $f(0) = \dfrac{1}{e}$, $f(e) = 0$ et $f(x) = e^{\frac{1 + \operatorname{Log} x}{1 - \operatorname{Log} x}}$ pour $x \neq 0$ et $x \neq e$.

1) Déterminer le domaine de définition de f .
   Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
2) Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3) Étudier la continuité de f en e .
4) Étudier la dérivabilité de f en e .
5) Étudier les variations de f .
6) Calculer $f(1)$. Conclusion. Construire (C_f) dans un repère orthonormé.
7) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
   Construire $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère que (C_f).
8) Calculer le nombre dérivé de f^{-1} en 1 c'est-à-dire $(f^{-1})'(1)$.
9) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$.

Solutions

1) f est définie lorsqu'on a : $\begin{cases} x > 0 \text{ et} \\ 1 - \operatorname{Log} x \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Log} x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq e \text{ .} \end{cases}$

Mais : $0 \in D_f$ et $e \in D_f$ car $f(0) = \dfrac{1}{e}$ et $f(e) = 0$

Donc : $D_f = [0\,,+\infty[$. D'autre part, f est continue sur $]0\,,+\infty[-\{e\}$.
On peut chercher si f est continue à droite en $x_0 = 0$.

$$\text{On a : } \lim_{x\to 0_+} \frac{1 + \operatorname{Log} x}{1 - \operatorname{Log} x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{Log} x} + 1}{\dfrac{1}{\operatorname{Log} x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1 \text{ car } \lim_{x\to 0_+} \operatorname{Log} x = -\infty \text{ .}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{t\to -1} e^t = e^{-1} = \frac{1}{e} = f(0).$$

Par suite : f est continue à droite en $x_0 = 0$.

2) f est continue à droite en $x_0 = 0$. Cherchons donc si f est dérivable à droite en $x_0 = 0$. On a :

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{1+\operatorname{Log} x}{1-\operatorname{Log} x}} - \dfrac{1}{e}}{x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{e\, e^{\frac{1+\operatorname{Log} x}{1-\operatorname{Log} x}} - 1}{x\, e} =$$

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{1+\operatorname{Log} x}{1-\operatorname{Log} x} + 1} - 1}{x\, e} = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{2}{1-\operatorname{Log} x}} - 1}{x\, e} = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{\frac{2}{1-\operatorname{Log} x}} - 1}{\dfrac{2}{1 - \operatorname{Log} x}} \; \frac{\dfrac{2}{1 - \operatorname{Log} x}}{x\, e} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \lim_{x\to 0_+} \frac{2}{e} \frac{1}{x(1 - \operatorname{Log} x)} = 1 \times \lim_{x\to 0_+} \frac{2}{e} \frac{1}{x - x \operatorname{Log} x} = \frac{2}{e} \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x - x\operatorname{Log} x}$$

Mais : $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} (x - x\operatorname{Log} x) = 0_+ - 0_- = 0_+ + 0_+ = 0_+$. Donc : $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x - x\operatorname{Log} x} = +\infty$

$$\text{D'où : } \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2}{e} \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x - x\operatorname{Log} x} = \frac{2}{e} \times (+\infty) = +\infty \text{ .}$$

Conclusion : f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 0$, mais (C_f) admet au point $A\left(0\,,\dfrac{1}{e}\right)$ une demi tangente parallèle à l'axe $x'y$.

3) On a :

x	0		e		$+\infty$
$1-\text{Log}\,x$	‖	$+$	0	$-$	

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} (1-\text{Log}\,x) = 0_+$.

De même : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0 = f(0)$ car $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} (1-\text{Log}\,x) = 0_-$.

conclusion : f est continue seulement à droite en e .

4) f n'est pas continue à gauche en e , donc elle n'est pas dérivable à gauche en e . Mais f est continue à droite en e . On cherche donc si f est dérivable à droite en e . On a :

$$\lim_{\substack{x\to e\\ x>e}} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = \lim_{\substack{x\to e\\ x>e}} \frac{1}{x-e}\, e^{\frac{1+\text{Log}\,x}{1-\text{Log}\,x}} = \lim_{\substack{x\to e\\ x>e}} \frac{1+\text{Log}\,x}{1-\text{Log}\,x}\, e^{\frac{1+\text{Log}\,x}{1-\text{Log}\,x}}\, \frac{1}{x-e}\, \frac{1-\text{Log}\,x}{1+\text{Log}\,x}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} t\,e^t \lim_{\substack{x\to e\\ x>e}} \frac{\text{Log}\,x-1}{x-e}\, \frac{-1}{1+\text{Log}\,x} \text{ car } \lim_{\substack{x\to e\\ x>e}} (1-\text{Log}\,x) = 0_-$$

Mais : $\lim\limits_{t\to-\infty} t\,e^t = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} \dfrac{\text{Log}\,x-1}{x-e} = \lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} \dfrac{\text{Log}\,x-\text{Log}\,e}{x-e} = (\text{Log}\,x)'_{x=e} = \dfrac{1}{e}$;

enfin : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} \dfrac{-1}{1+\text{Log}\,x} = -\dfrac{1}{2}$. Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} \dfrac{f(x)-f(e)}{x-e} = 0 \times \dfrac{1}{e} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0.$

Conclusion : f est dérivable à droite en e et $f'_d(e) = 0$. Par conséquent, (C_f) admet au point $B(e\,,0)$ une demi-tangente parallèle à l'axe $x'x$.

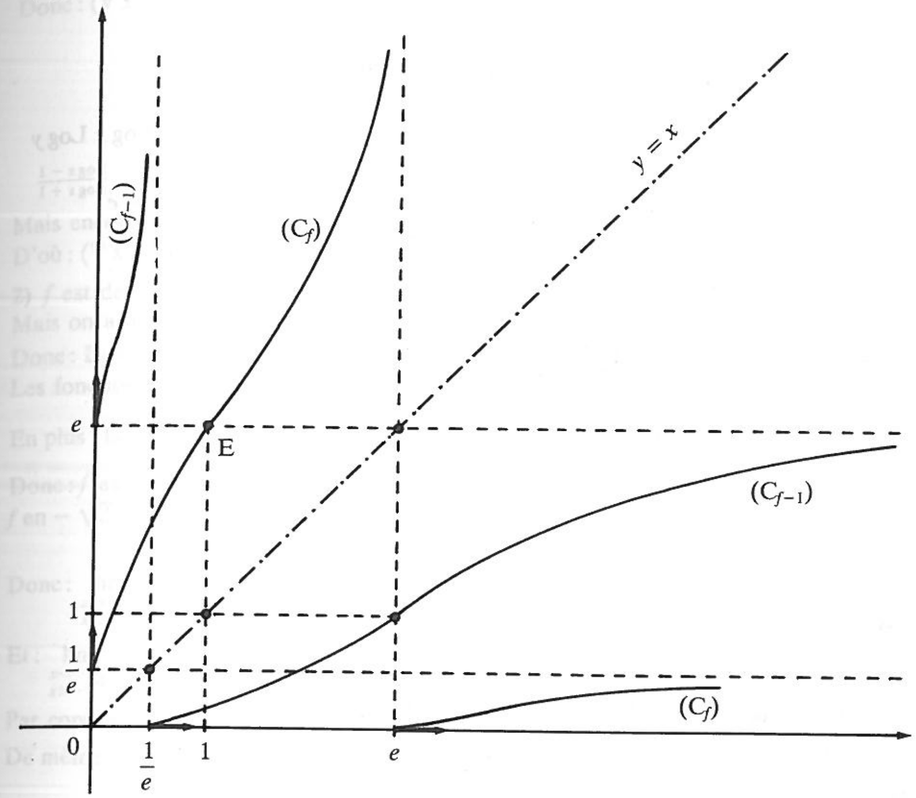
5) $(\forall\, x \in\,]0\,,+\infty[\, - \{e\}) : f'(x) = \dfrac{2}{x(1-\text{Log}\,x)^2}\, e^{\frac{1+\text{Log}\,x}{1-\text{Log}\,x}}$; donc : $f'(x) > 0$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\text{Log}\,x}{1-\text{Log}\,x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{\text{Log}\,x}+1}{\frac{1}{\text{Log}\,x}-1} = \dfrac{1}{-1} = -1.$

Par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to-1} e^t = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. D'où :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+\infty$ $+$	‖ 0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$ ‖ 0	↗	$\frac{1}{e}$

6) $f(1) = e$. Donc (C_f) passe par le point $E(1\,,e)$.



7) f est continue et strictement croissante sur chacun des intervalles $[0\,,e\,[$ et $[e\,,+\infty\,[$. En plus l'ensemble de ses valeurs est :
$\left[\dfrac{1}{e}\,,+\infty\,\right[\cup \left[0\,,\dfrac{1}{e}\right[= [0\,,+\infty\,[$.

Donc : f est une bijection de $[0\,,e\,[\,\cup\,[e\,,+\infty\,[\, = [0\,,+\infty\,[$ vers $[0\,,+\infty\,[$. Elle admet donc une fonction réciproque $f^{-1} : [0\,,+\infty\,[\, \to [0\,,+\infty\,[$ dont le tableau de variation est :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	e	↗	$+\infty$ ‖ 0	↗	e

La courbe représentative $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1} se déduit de (C_f) dans une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$ (voir schéma du 6)).

8) $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(y)}$ avec $y = f^{-1}(1) \Leftrightarrow 1 = f(y) = e^{\frac{1+\text{Log}\,y}{1-\text{Log}\,y}}$ avec $y \in\,]0\,,+\infty\,[\, - \{e\}$.

D'où : $\dfrac{1+\text{Log}\,y}{1-\text{Log}\,y} = 0 \Leftrightarrow 1+\text{Log}\,y = 0 \Leftrightarrow \text{Log}\,y = -1 \Leftrightarrow y = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ (convient).

Donc : $f'(y) = f'(e^{-1}) = \dfrac{2}{e^{-1}(1+1)^2}\, e^{\frac{1-1}{1+1}} = \dfrac{1}{2e^{-1}} = \dfrac{e}{2}$.

Enfin : $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{2}{e}$.

9) $\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in [0\,,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in [0\,,+\infty[\,. \end{cases}$

Pour $x \in \,]0\,,+\infty[\, - \left\{\frac{1}{e}\right\}$ et $y \in \,]0\,,+\infty[\, - \{e\}$ on a :

$$x = f(y) \Leftrightarrow x = e^{\frac{1+\mathrm{Log}\,y}{1-\mathrm{Log}\,y}} \Leftrightarrow \frac{1+\mathrm{Log}\,y}{1-\mathrm{Log}\,y} = \mathrm{Log}\,x \Leftrightarrow 1+\mathrm{Log}\,y = \mathrm{Log}\,x - \mathrm{Log}\,x\,\mathrm{Log}\,y$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Log}\,y + \mathrm{Log}\,x\,\mathrm{Log}\,y = \mathrm{Log}\,x - 1 \Leftrightarrow \mathrm{Log}\,y = \frac{\mathrm{Log}\,x - 1}{\mathrm{Log}\,x + 1} \Leftrightarrow y = e^{\frac{\mathrm{Log}\,x - 1}{\mathrm{Log}\,x + 1}}$$

Donc : $\left(\forall\, x \in \,]0\,,+\infty[\, - \left\{\frac{1}{e}\right\}\right) : f^{-1}(x) = e^{\frac{\mathrm{Log}\,x - 1}{\mathrm{Log}\,x + 1}}$

En plus : $f(o) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow o = f^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$

$f(e) = o \Leftrightarrow e = f^{-1}(o)$

Conclusion : f^{-1} est définie par :

$f^{-1}(o) = e\,;\, f^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) = 0\,;$

$f^{-1}(x) = e^{\frac{\mathrm{Log}\,x - 1}{\mathrm{Log}\,x + 1}}$ pour $x \in \,]0\,,+\infty[\, - \left\{\frac{1}{e}\right\}$.

PROBLÈME 6

1) Soit g définie par $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$.

Montrer que $(\forall\, x \in \mathbb{R}^*) : g(x) = x^2\left[\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 8\right]$.

En déduire que : $(\forall\, x \in \mathbb{R}) : g(x) = (x^2 - 2x + 2)\,(x^2 + 4x + 2)$.

2) Soit f définie par : $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$ et

$f(x) = x\,e^{\frac{2x}{2-x^2}}$ pour $x \neq \sqrt{2}$ et $x \neq -\sqrt{2}$.

Déterminer le domaine de définition de f.

Etudier la continuité de f.

3) Etudier la dérivabilité de f en $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

4) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe (on donne $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$).

5) On admet que : $f(-2-\sqrt{2}) \simeq -6{,}8$ et $f(-2+\sqrt{2}) \simeq -0{,}3$.

Déterminer le tableau de variation de f.

6) Etudier les branches infinies de (C_f).

7) Calculer $f'(o)$; interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Solutions

1) $(\forall\, x \in \mathbb{R}^*) : g(x) = x^2\left[x^2 + 2x - 4 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right] = x^2\left[x^2 + \frac{4}{x^2} + 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 4\right]$

$$= x^2\left[\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 4 + 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 4\right]$$

$$= x^2\left[\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 8\right]$$

Donc : $(\forall\, x \in \mathbb{R}^*) : g(x) = x^2\left[\left(x + \frac{2}{x} + 1\right)^2 - 1 - 8\right] = x^2\left[\left(x + \frac{2}{x} + 1\right)^2 - 9\right]$

$$= x^2\left[\left(x + \frac{2}{x} + 1 - 3\right)\left(x + \frac{2}{x} + 1 + 3\right)\right]$$

$$= x^2\left[\frac{x^2 + 2 - 2x}{x}\;\frac{x^2 + 2 + 4x}{x}\right]$$

$$= (x^2 - 2x + 2)\,(x^2 + 4x + 2)$$

Mais encore cette égalité est vraie pour $x = 0$.

D'où : $(\forall\, x \in \mathbb{R}) : g(x) = (x^2 - 2x + 2)\,(x^2 + 4x + 2)$.

2) f est définie pour $2 - x^2 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \sqrt{2}$ et $x \neq -\sqrt{2}$.

Mais on a aussi : $-\sqrt{2} \in D_f$ et $\sqrt{2} \in D_f$ car $f(-\sqrt{2}) = 0$ et $f(\sqrt{2}) = 0$.

Donc : $D_f = \mathbb{R}$. D'autre part :

Les fonctions : $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

En plus : la fonction $x \mapsto \frac{2x}{2-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\}$.

Donc : f est continue sur $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\}$. Il reste à étudier la continuité de f en $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. On a d'abord :

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$2 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2}}} f(x) = -\sqrt{2} \lim\limits_{t \to +\infty} e^t = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2}}} (2 - x^2) = 0_-$

Et : $\lim\limits_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x > -\sqrt{2}}} f(x) = -\sqrt{2} \lim\limits_{t \to -\infty} e^t = -\sqrt{2} \times 0 = 0 = f(-\sqrt{2})$ car $\lim\limits_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x > -\sqrt{2}}} (2 - x^2) = 0_+$

Par conséquent : f est continue seulement à droite en $-\sqrt{2}$.

De même : $\lim\limits_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x < \sqrt{2}}} f(x) = \sqrt{2} \lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x < \sqrt{2}}} (2 - x^2) = 0_+$

Et : $\lim\limits_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x > \sqrt{2}}} f(x) = \sqrt{2} \lim\limits_{t \to -\infty} e^t = \sqrt{2} \times 0 = 0 = f(\sqrt{2})$ car $\lim\limits_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x > \sqrt{2}}} (2 - x^2) = 0_-$.

Par conséquent : f est continue seulement à droite en $\sqrt{2}$.

3) f n'est pas continue à gauche en $-\sqrt{2}$ et à gauche en $\sqrt{2}$. Par suite, elle n'est pas dérivable à gauche en $-\sqrt{2}$ et à gauche en $\sqrt{2}$. On cherche donc seulement si f est dérivable à droite en $-\sqrt{2}$ et en $\sqrt{2}$. On a :

$$\lim_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x > -\sqrt{2}}} \frac{f(x) - f(-\sqrt{2})}{x + \sqrt{2}} = \lim_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x > -\sqrt{2}}} \frac{x}{x + \sqrt{2}}\, e^{\frac{2x}{2-x^2}} = \lim_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x > -\sqrt{2}}} \frac{\frac{x}{x+\sqrt{2}}}{\frac{2x}{2-x^2}} \lim_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x > -\sqrt{2}}} \frac{2x}{2-x^2}\, e^{\frac{2x}{2-x^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ x > -\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2} - x}{2} \lim_{t \to -\infty} t\,e^t = \sqrt{2} \times 0 = 0 = f'_d(-\sqrt{2})\,.$$

Donc f est dérivable à droite en $-\sqrt{2}$ et $f'_d(-\sqrt{2}) = 0$.

De même : $\lim\limits_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x > \sqrt{2}}} \frac{f(x) - f(\sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = \lim\limits_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x > \sqrt{2}}} \frac{x}{x - \sqrt{2}}\, e^{\frac{2x}{2-x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x > \sqrt{2}}} \frac{\frac{x}{x-\sqrt{2}}}{\frac{2x}{2-x^2}} \lim\limits_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x > \sqrt{2}}} \frac{2x}{2-x^2}\, e^{\frac{2x}{2-x^2}}$

$$= \lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ x > \sqrt{2}}} \frac{-\sqrt{2} - x}{2} \lim_{t \to -\infty} t\,e^t = -\sqrt{2} \times 0 = 0 = f'_d(\sqrt{2})$$

Donc : f est dérivable à droite en $\sqrt{2}$ et $f'_d(\sqrt{2}) = 0$.

4) Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{2-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Donc : f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} = D'$.

$$(\forall x \in D') : f'(x) = e^{\frac{2x}{2-x^2}} \left[\frac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4}{(2-x^2)^2} \right] = e^{\frac{2x}{2-x^2}} \frac{g(x)}{(2-x^2)^2}$$

Son signe est celui de $g(x)$. Mais $g(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4x + 2)$

Considérons $x^2 - 2x + 2 = 0$; on a : $\Delta_1' = 1 - 2 = -1 < 0$; donc :

$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 2 > 0$.

Considérons $x^2 + 4x + 2 = 0$; on a : $\Delta_2' = 4 - 2 = 2$; elle admet 2 solutions :

$x_1 = -2 + \sqrt{2}$ et $x_2 = -2 - \sqrt{2}$.

$g(x)$ a donc le signe de $x^2 + 4x + 2$; d'où :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite, le signe de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$		x_2		$-\sqrt{2}$		x_1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖ 0	$-$	0	$+$	‖ 0	$+$	

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x \lim\limits_{t \to 0} e^t = (-\infty)(1) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \lim\limits_{t \to 0} e^t = (+\infty)(1) = +\infty$

D'où :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖ 0	$-$	0	$+$	‖ 0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2-\sqrt{2})$	↘	$-\infty$ ‖ 0	↘	$f(-2+\sqrt{2})$	↗	$+\infty$ ‖ 0	↗	$+\infty$

avec par hypothèse : $f(-2-\sqrt{2}) \simeq -6{,}8$ et $f(-2+\sqrt{2}) \simeq -0{,}3$.

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; en plus : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{t \to 0} e^t = 1$;

enfin : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x \left[e^{\frac{2x}{2-x^2}} - 1\right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x \dfrac{2x}{2-x^2} \dfrac{e^{\frac{2x}{2-x^2}} - 1}{\frac{2x}{2-x^2}}$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{2-x^2} \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = -2 \times 1 = -2$$

Conclusion : la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (C_f) quand $x \to -\infty$ et quand $x \to +\infty$.

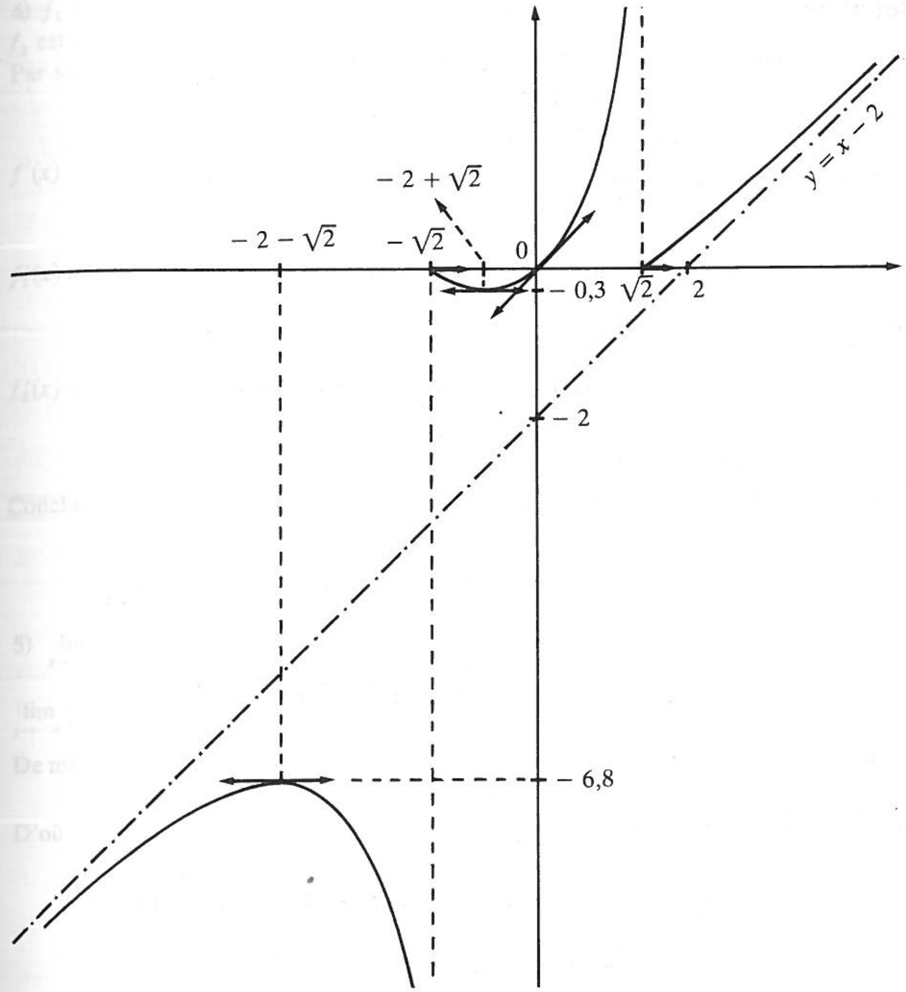
7) $f'(0) = e^0 \dfrac{g(0)}{4} = 1 \dfrac{4}{4} = 1$. Donc (C_f) admet à l'origine O des axes une tangente de pente 1 et d'équation $y = x$.

$f(0) = 0$; donc (C_f) passe par l'origine O des axes.

Remarque : $-2 - \sqrt{2} \simeq -2 - 1{,}4 = -3{,}4$

$-2 + \sqrt{2} \simeq -2 + 1{,}4 = -0{,}6$

par hypothèse : $f(-2-\sqrt{2}) \simeq -6{,}8$ et $f(-2+\sqrt{2}) \simeq -0{,}3$



PROBLÈME 7

Soit f définie par $f(0) = 1$ et

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 1 + e^{-x^2 - 3x + \frac{4}{x}} & \text{pour } x \in]-\infty, 0[\\ f_2(x) = e^{\frac{2}{e} x^2 (\operatorname{Log} x - 1)} & \text{pour } x \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

f est-elle continue en $x_0 = 0$?

2) f est-elle dérivable en $x_0 = 0$?

3) Soit $u(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$. Calculer $u(-2)$. En déduire le signe de $u(x)$.

4) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.

5) Étudier les variations de f.

6) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Conclusion.

7) Calculer $f(e)$. Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Solutions

1) f_1 est définie sur $\mathbb{R}^*$, et en particulier en tout $x \in]-\infty, 0[$.
f_2 est définie sur $]0, +\infty[$. En plus : $o \in D_f$ car $f(o) = 1$.
Donc : $D_f =]-\infty, o[\cup]o, +\infty[\cup \{o\} = \mathbb{R}$.
D'autre part : $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} f_1(x) = 1 + \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 1 + 0 = 1 = f(0)$.

Et : $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} e^{\frac{2}{e}x(x\,\text{Log}\,x - x)} = \lim\limits_{t\to 0} e^t = 1 = f(0)$

car $\lim\limits_{x\to 0_+} x\,\text{Log}\,x = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. Par conséquent, f est continue en $x_0 = 0$.

2) $$\lim_{x\to 0_-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0_-}\frac{f_1(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0_-}\frac{e^{-x^2-3x+\frac{4}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0_-}\left(-x^2-3x+\frac{4}{x}\right)e^{-x^2-3x+\frac{4}{x}}\lim_{x\to 0_-}\frac{1}{x\left(-x^2-3x+\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} t\,e^t \lim_{x\to 0_-}\frac{1}{-x^3-3x^2+4} = 0\times\frac{1}{4} = o = f'_g(0).$$

De même :

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0_+}\frac{f_2(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0_+}\frac{e^{\frac{2}{e}x^2(\text{Log}\,x-1)}-1}{x}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\lim_{x\to 0_+}\frac{2}{e}x(\text{Log}\,x-1) \text{ avec } t = \frac{2}{e}x^2(\text{Log}\,x-1)$$

$$= 1\times 0 = 0 \text{ car } \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1$$

$$\lim_{x\to 0_+} x(\text{Log}\,x-1) = \lim_{x\to 0_+}(x\,\text{Log}\,x - x) = 0 - 0 = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Par conséquent, (C_f) admet au point A(0, 1) une tangente parallèle à l'axe $x'x$.

3) $u(-2) = -16 + 12 + 4 = 0$. Donc : $u(x)$ est divisible par $x + 2$.
Après division on obtient : $u(x) = (x+2)(2x^2 - x + 2)$.
Considérons l'équation $2x^2 - x + 2 = 0$. On a : $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$.
Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x^2 - x + 2 > 0$. Par suite : $u(x)$ a le signe de $x + 2$.

D'où :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

4) f_1 est dérivable sur son $D_{f_1} = \mathbb{R}^*$ et en particulier sur $]-\infty, 0[$.
f_2 est dérivable sur son $D_{f_2} =]0, +\infty[$.
Par suite : la fonction dérivée f' de f est définie par :

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = \dfrac{-u(x)}{x^2}e^{-x^2-3x+\frac{4}{x}} & \text{pour } x \in]-\infty, 0[\\ f_2'(x) = \dfrac{2}{e}x(2\,\text{Log}\,x - 1)\,e^{\frac{2}{e}x^2(\text{Log}\,x-1)} & \text{pour } x \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

$f_1'(x)$ a le signe contraire de celui de $u(x)$; d'où :

x	$-\infty$		-2		0
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	‖

$f_2'(x)$ a le signe de $2\,\text{Log}\,x - 1$; d'où :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_2'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Conclusion :

x	$-\infty$		-2		0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 1 + \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 1 + 0 = 1$ car on a :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x^2-3x+\frac{4}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(-1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}\right) = +\infty(-1) = -\infty.$$

De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$.

D'où :

x	$-\infty$		-2		0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	2	↘	1	↘	$\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

Car $f(-2) = f_1(-2) = 1 + e^o = 1 + 1 = 2$
et $f(\sqrt{e}) = f_2(\sqrt{e}) = e^{2(\text{Log}\sqrt{e}-1)} = e^{2\left(\frac{1}{2}\text{Log}\,e-1\right)} = e^{2\left(\frac{1}{2}-1\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

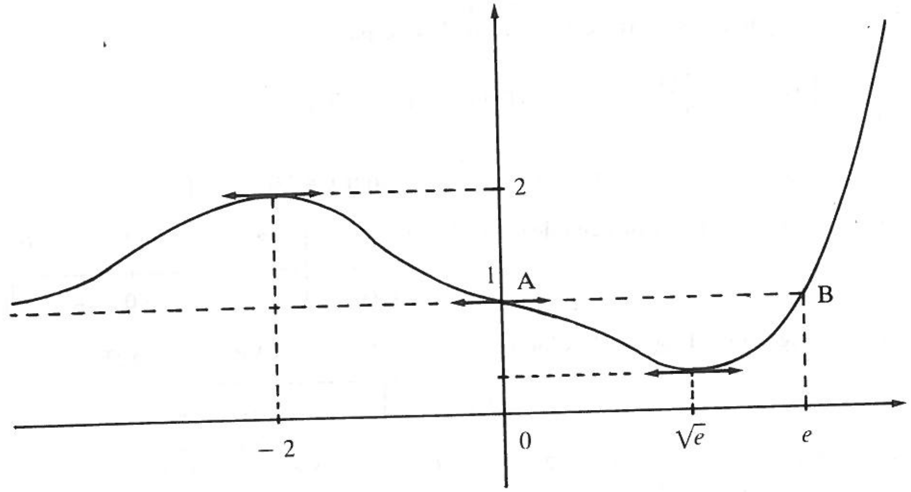
6) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{2}{e}x^2(\text{Log}\,x-1)}}{e^{\text{Log}\,x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{e}x^2(\text{Log}\,x-1)-\text{Log}\,x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{e}x^2\left(\text{Log}\,x-1-\frac{1}{x}\frac{\text{Log}\,x}{x}\right)} = \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{\text{Log}\,x}{x} = 0\times 0 = 0$.

Donc : (C_f) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe $y'y$.

7) $f(e) = f_2(e) = e^o = 1$. Donc (C_f) passe par le point B$(e\ ,\ 1)$.



PROBLÈME 8

Soit f une fonction définie par : $f(0) = -1$ et

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -1 + e^{\frac{x-1}{x^2}} & \text{pour } x \in \,]-\infty\ ,\ 1] - \{0\} \\ f_2(x) = e^{x \,\mathrm{Log}\, \frac{x-1}{x^2}} & \text{pour } x \in \,]1\ ,\ +\infty\,[\,. \end{cases}$$

On donne : $\mathrm{Log}\, 2 \simeq 0{,}7$; $\mathrm{Log}\, 3 \simeq 1{,}1$ et $e \simeq 2{,}7$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$ et en 1.

2) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

3) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ (on pourra poser $x = 1 + h$).

4) Etudier la dérivabilité de f en 1.

5) Etudier les variations de $g(x) = \mathrm{Log}\, \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{2-x}{x-1}$. En déduire que g s'annule en $\alpha \in \left]\dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{2}\right[$. Donner le signe de $g(x)$.

6) Sachant que $\dfrac{4}{3} \simeq 1{,}3$ et $\dfrac{3}{2} = 1{,}5$, on prend $\alpha \simeq 1{,}4$.
Démontrer que $f(\alpha) \simeq e^{-2} \simeq 0{,}13$.

7) Etudier les variations de f.

8) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Solutions

1) f_1 est définie sur $\mathbb{R}^*$ et en particulier sur $]-\infty\ ,\ 1] - \{0\} = D_1$.
f_2 est définie lorsque : $x \neq 0$ et $\dfrac{x-1}{x^2} > 0$ c'est-à-dire $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$;
donc f_2 est définie sur $]1\ ,\ +\infty\,[\ = D_2$.
En plus : $0 \in D_f$ car $f0) = -1$. D'où : $D_f = D_1 \cup D_2 \cup \{0\} = \mathbb{R}$.
D'autre part : f_1 est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en particulier sur D_1. En plus :
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = -1 + \lim\limits_{t \to -\infty} e^t = -1 + 0 = -1 = f(0)$.
Donc : f est continue en $x_0 = 0$.
De même, puisque f_1 est continue sur $\mathbb{R}^*$, f est donc continue à gauche en 1 et $f(1) = f_1(1) = -1 + e^0 = -1 + 1 = 0$.
En plus : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f_2(x) = \lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0 = f(1)$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \mathrm{Log}\, \dfrac{x-1}{x^2} = \lim\limits_{u \to 0_+} \mathrm{Log}\, u = -\infty$
f est donc continue aussi à droite en 1.
Par conséquent : f est continue en 1.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_1(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} e^{\frac{x-1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x^2} e^{\frac{x-1}{x^2}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x-1}$

$$= \lim_{t \to -\infty} t\, e^t \lim_{x \to 0} \frac{x}{x-1} = 0 \times 0 = 0.$$

Donc : f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 0$. Par suite, (C_f) admet au point A$(0, -1)$ une tangente parallèle à l'axe $x'x$.

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{f_2(x)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{e^{x \,\mathrm{Log}\, \frac{x-1}{x^2}}}{x - 1} = \lim\limits_{h \to 0_+} \dfrac{e^{(1+h)\,\mathrm{Log}\, \frac{h}{(1+h)^2}}}{h}$

$$= \lim_{h \to 0_+} \frac{e^{(1+h)\,\mathrm{Log}\, h - (1+h)\,\mathrm{Log}\,(1+h)^2}}{h} \simeq \lim_{h \to 0_+} \frac{e^{(1+h)\,\mathrm{Log}\, h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0_+} \frac{e^{(1+h)\,\mathrm{Log}\, h}}{e^{\,\mathrm{Log}\, h}} = \lim_{h \to 0_+} e^{(1+h)\,\mathrm{Log}\, h - \mathrm{Log}\, h} = \lim_{h \to 0_+} e^{h\,\mathrm{Log}\, h} = e^0 = 1.$$

Remarque : Il y a une autre méthode. En effet :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{e^{x\,\mathrm{Log}\, \frac{x-1}{x^2}}}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{e^{x\,\mathrm{Log}\,(x-1) - x\,\mathrm{Log}\, x^2}}{x - 1} \simeq \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{e^{x\,\mathrm{Log}\,(x-1)}}{x - 1} =$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{e^{x\,\mathrm{Log}\,(x-1)}}{e^{\mathrm{Log}\,(x-1)}} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} e^{x\,\mathrm{Log}\,(x-1) - \mathrm{Log}\,(x-1)} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} e^{(x-1)\,\mathrm{Log}\,(x-1)}$$

$$= \lim_{h \to 0_+} e^{h\,\mathrm{Log}\, h} = e^0 = 1.$$

4) f_1 est dérivable sur son $D_{f_1} = \mathbb{R}^*$; donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = f'_1(1)$. Mais : $(\forall\, x \in \mathbb{R}^*)$: $f'_1(x) = \dfrac{2-x}{x^3} e^{\frac{x-1}{x^2}}$.

Par suite : $f'_g(1) = f'_1(1) = \dfrac{2-1}{1} e^0 = 1$.

En plus : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$ (voir 3)). Donc f est aussi dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 1$.

Conclusion : f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$ car $f'_g(1) = f'_d(1) = 1$.

5) $D_g =]1, +\infty[$; $(\forall x \in D_g) : g'(x) = \dfrac{-x^2+2x-2}{x(x-1)^2}$ du signe de $-x^2+2x-2$.

On a : $\Delta' = 1 - 2 = -1 < 0$. Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : -x^2+2x-2 < 0$.
Par conséquent : $(\forall x \in]1, +\infty[) : g'(x) < 0$. D'autre part on a :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left[\text{Log}(x-1) - \text{Log}\, x^2 + \frac{2-x}{x-1}\right] \simeq \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left[\text{Log}(x-1) + \frac{2-x}{x-1}\right] =$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x-1)\,\text{Log}(x-1) + 2 - x}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1}[(x-1)\,\text{Log}(x-1) + 2 - x] = +\infty\,(0 + 2 - 1) = +\infty .$$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1)\,\text{Log}(x-1) = \lim\limits_{h\to 0_+} h\,\text{Log}\, h = 0$.

De même on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{t\to 0_+} \text{Log}\, t + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-x}{x-1} = -\infty + (-1) = -\infty$.

D'où :

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

D'autre part : $\dfrac{4}{3} > 1$ et $\dfrac{3}{2} > 1$.

En plus : $\dfrac{4}{3} < \dfrac{3}{2}$ car $\dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{6}$ et $\dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{6}$.

Donc : g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{2}\right]$.

En plus : $g\left(\dfrac{4}{3}\right) = \text{Log}\, \dfrac{3}{16} + 2 = \text{Log}\, 3 - 4\,\text{Log}\, 2 + 2 \simeq 1{,}1 - 4 \times 0{,}7 + 2 = 0{,}3 > 0$.

Et : $g\left(\dfrac{3}{2}\right) = \text{Log}\, \dfrac{2}{9} + 1 = \text{Log}\, 2 - 2\,\text{Log}\, 3 + 1 \simeq 0{,}7 - 2 \times 1{,}1 + 1 = -0{,}5 < 0$

Ces résultats impliquent qu'il existe α unique $\in \left]\dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{2}\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Par conséquent, le signe de $g(x)$ est :

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

6) $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \text{Log}\, \dfrac{\alpha - 1}{\alpha^2} = \dfrac{\alpha-2}{\alpha-1}$.

Donc : $f(\alpha) = f_2(\alpha) = e^{\alpha\,\text{Log}\,\frac{\alpha-1}{\alpha^2}} = e^{\alpha\,\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} \simeq e^{1{,}4\,\frac{1{,}4-2}{1{,}4-1}} \simeq e^{-2{,}1} \simeq e^{-2}$

Mais : $e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \simeq \dfrac{1}{(2{,}7)^2} \simeq 0{,}13$.

7) f_1 est dérivable sur son $D_{f_1} = \mathbb{R}^*$, et en particulier sur $]-\infty, 1] - \{0\}$.
f_2 est dérivable sur $]1, +\infty[$ car $D_{f_2} = [1, +\infty[$.
La fonction dérivée f' de f est donc définie par :

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = \dfrac{2-x}{x^3}\, e^{\frac{x-1}{x^2}} & \text{pour } x \in]-\infty, 1] - \{0\} . \\ f_2'(x) = g(x)\, e^{x\,\text{Log}\,\frac{x-1}{x^2}} & \text{pour } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

$f_1'(x)$ a le signe de $\dfrac{2-x}{x^3}$ et $f_2'(x)$ a le signe de $g(x)$.

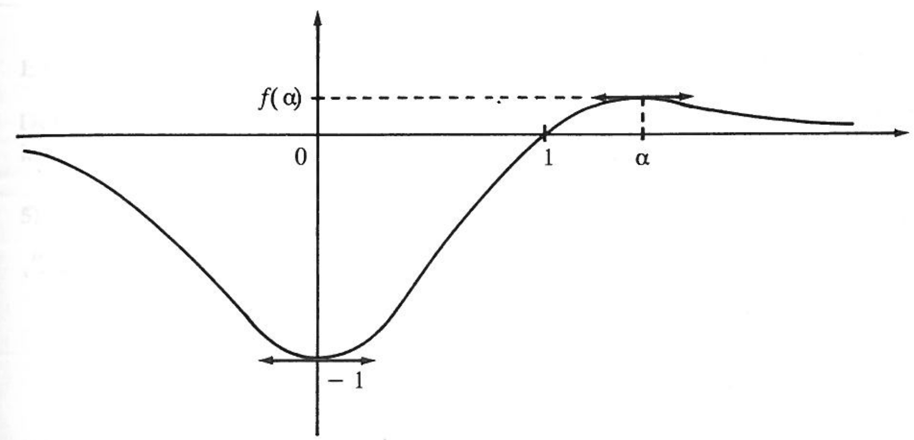
D'autre part : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -1 + \lim\limits_{t\to 0} e^t = -1 + 1 = 0$

Et : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$ car on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\text{Log}\, \dfrac{x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x \lim\limits_{u\to 0_+} \text{Log}\, u = (+\infty)(-\infty) = -\infty$.

D'où :

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0



PROBLÈME 9

Soit $f(x) = \text{Log}\,(x\, e^x - x + 1)$.

1) On pose $g(x) = x\, e^x - x + 1$. Calculer $g'(x)$. Étudier les variations de g'. Calculer $g'(0)$. En déduire le signe de $g'(x)$.
2) Étudier les variations de g.
3) En déduire le domaine de définition et les variations de f.
4) Étudier les brancges infinies de (C_f).
5) Soit $u(x) = e^x + x - 2$. Étudier les variations de u. En déduire que $u(x)$ s'annule en $x_0 \in]0, 1[$ (on ne demande pas de calculer x_0).
6) Soit $h(x) = f(x) - x$. Étudier les variations de h. Calculer $h(0)$ et $h(1)$. En déduire le signe de $h(x)$. En déduire enfin la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = x$.
7) Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point B $(1, 1)$. Construire (C_f).
8) En utilisant la question 5), montrer qu'il existe un réel unique $x_0 \in]0, 1[$ telle que la tangente à (C_f) au point I $(x_0, f(x_0))$ soit parallèle à la droite d'équation $y = x$.
9) Montrer que la restriction f_1 de f à $[0, +\infty[$ admet une fonction réciproque f_1^{-1}. Tracer $(C_{f_1^{-1}})$ dans le même repère que (C_f). Calculer $f_1^{-1}(0)$.

Solutions

1) $D_g = \mathbb{R}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) : g'(x) = x e^x + e^x - 1$;
$D_{g'} = \mathbb{R}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) : g''(x) = (x+2)\,e^x$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} g'(x) = 0 + 0 - 1 = -1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$.

Donc :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	-1	$\searrow$	$-1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Or : $g'(o) = 0 + 1 - 1 = 0$ et $-1 - e^{-2} = -1 - \dfrac{1}{e^2} < 0$.

Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0 - (-\infty) + 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(e^x - 1 + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty\,(+\infty - 1 + 0) = +\infty\,(+\infty) = +\infty$.

Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) $f(x) = \operatorname{Log} g(x)$. Donc f est définie lorsque : $g(x) > 0$.
Or : d'après le tableau de variation de g on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geqslant 1$.
Donc $D_f = \mathbb{R}$. En plus : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \geqslant 0$ car $g(x) \geqslant 1$.
D'autre part : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$.
Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g'(x)$ car $g(x) \geqslant 1$.
Enfin : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{Log} g(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \operatorname{Log} t = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$
Et : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Log} g(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \operatorname{Log} t = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Conclusion :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\operatorname{Log} g(x)}{g(x)}\,\dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\operatorname{Log} t}{t}\,\lim\limits_{x \to -\infty}\left(e^x - 1 + \dfrac{1}{x}\right)$
$= 0(0 - 1 + 0) = 0$.

Donc la courbe (C_f) admet, pour x tendant vers $-\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

D'autre part, pour calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, on a d'abord :

$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = \operatorname{Log} xe^x\left(1 - \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{1}{xe^x}\right)$
$= \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} e^x + \operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{1}{xe^x}\right)$
$= \operatorname{Log} x + x + \operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{1}{xe^x}\right)$

Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[\dfrac{\operatorname{Log} x}{x} + 1 + \dfrac{1}{x}\operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{1}{xe^x}\right)\right]$
$= 0 + 1 + 0 \times 0 = 1$.

En plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[\operatorname{Log} x + \operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{1}{xe^x}\right)\right] = +\infty + 0 = +\infty$.

Donc : la courbe (C_f) admet, pour x tendant vers $+\infty$, une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation : $y = x$.

5) $D_u = \mathbb{R}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) : u'(x) = e^x + 1 > 0$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 0 - \infty - 2 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$. Donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

u est donc continue et strictement croissante sur $[0\,,1]$.
En plus : $u(0) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0$
Et : $u(1) = e + 1 - 2 = e - 1 > 0$ $\Big\}$. Donc : $(\exists\,!\,x_0 \in\ ]0\,,1[\ : u(x_0) = 0$.

6) $D_h = D_f = \mathbb{R}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) : h'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{g'(x)}{g(x)} - 1 = \dfrac{g'(x) - g(x)}{g(x)}$
$= \dfrac{e^x + x - 2}{g(x)} = \dfrac{u(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = +\infty$ (voir 4)).

Ou encore : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} [\operatorname{Log}(xe^x - x + 1) - \operatorname{Log} e^x]$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Log} \dfrac{xe^x - x + 1}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Log}\left(x - \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}\right)$
$= \lim\limits_{t \to +\infty} \operatorname{Log} t = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x - \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty - 0 + 0 = +\infty$.

Signe de $h'(x)$: On a vu que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : h'(x) = \dfrac{u(x)}{g(x)}$.
Or : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geqslant 1$ (voir 2)).
Donc le signe de $h'(x)$ est celui de $u(x)$.
Or, d'après la question 5) on a :

x	$-\infty$		x_o		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

avec $x_o \in\ ]0\,,1[$.

D'où :

x	$-\infty$		x_o		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(x_o)$	$\nearrow$	$+\infty$

En plus : $h(0) = f(0) - 0 = \text{Log } 1 - 0 = 0$

$h(1) = f(1) - 1 = \text{Log } e - 1 = 1 - 1 = 0$

Par suite, le tableau précédent donne :

x	$-\infty$	0	x_o	1	$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow 0$	$h(x_o)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

Donc : $h(x_o) < 0$ et on a :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $h(x) > 0$ pour $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

$h(x) < 0$ pour $x \in]0, 1[$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

Par conséquent :

(C_f) est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ pour $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

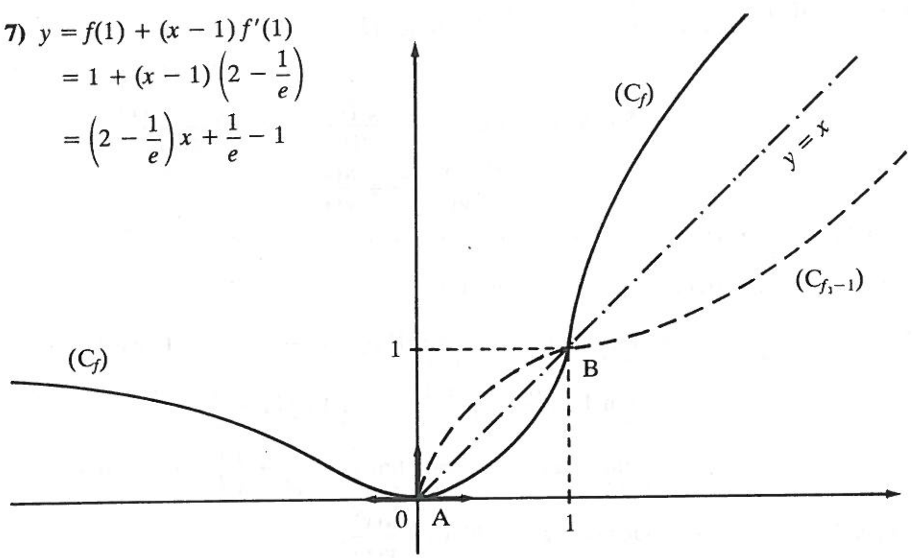
(C_f) est au-dessous de cette droite pour $x \in]0, 1[$.

(C_f) coupe cette droite en 2 points : A(0 , 0) et B(1 , 1).

7) $y = f(1) + (x - 1) f'(1)$

$= 1 + (x - 1)\left(2 - \frac{1}{e}\right)$

$= \left(2 - \frac{1}{e}\right)x + \frac{1}{e} - 1$



8) x_o existe si et seulement si $f'(x_o) = 1$.

Or : $f'(x_o) = 1 \Leftrightarrow \frac{g'(x_o)}{g(x_o)} = 1 \Leftrightarrow g'(x_o) = g(x_o) \Leftrightarrow x_o e^{x_o} + e^{x_o} - 1 = x_o e^{x_o} - x_o + 1$

$\Leftrightarrow e^{x_o} + x_o - 2 = 0 \Leftrightarrow u(x_o) = 0.$

D'après la question 5), l'équation $u(x_o) = 0$ admet une solution unique $x_o \in]0, 1[$.

9) D'après le tableau de variation de f, on voit que f_1 est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$. Donc elle admet une fonction réciproque $f_1^{-1} = [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telle que l'on ait :

$$\begin{cases} y = f_1^{-1}(x) \\ x \in [0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f_1(y) = f(y) \\ y \in [0, +\infty[\end{cases}$$

La courbe $(C_{f^{-1}})$ se déduit de (C_{f_1}) dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Enfin : $y = f_1^{-1}(0) \Leftrightarrow 0 = f_1(y) \Leftrightarrow 0 = f(y)$.

Or, d'après le tableau de variation de f, l'équation $f(y) = 0$ admet une solution unique $y = 0$.

Donc : $f_1^{-1}(0) = 0$.

PROBLÈME 10

Soit $f_m(x) = (x^2 - m + 2)\, e^{1-x}$ avec $m \in \mathbb{R}$. Soit (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Étudier $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$. En déduire l'étude des branches infinies de la courbe (C_m).

2) Étudier les variations de f_m suivant les valeurs de m.

3) Calculer $f_m(0)$. En déduire $f_0(0)$, $f_1(0)$ et $f_2(0)$.

4) Pour $m_1 < m_2$, comparer $f_{m_1}(x)$ et $f_{m_2}(x)$. Conclusion.
Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f_{m_1}(x) - f_{m_2}(x)]$.

5) Construire (C_0), $(_1)$ et (C_2) dans le même repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Que pensez-vous du point A (1 , 2).

6) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine limité par (C_2), l'axe des abscisses, et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \lambda$ avec $\lambda > 0$. En déduire $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Solutions

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - m + 2)\frac{e}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} - \frac{m}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right)e.$$

Mais : $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2 = \lim_{x \to +\infty} \left(2\,\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2 = (2 \times 0)^2 = 0$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = (0 - 0 + 0)\, e = 0$.

Étude des branches infinies de la courbe (C_m) :

$$\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = +\infty \; ; \; \lim_{x \to -\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - m + 2}{x} e^{1-x} = -\infty \times +\infty = -\infty.$$

Donc (C_m) admet, pour x tendant vers $-\infty$, une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

Enfin : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = 0$. Donc, pour x tendant vers $+\infty$, la courbe (C_m) est asymptote à l'axe des abscisses.

2) $D_{f_m} = \mathbb{R}$; $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'_m(x) = (-x^2 + 2x + m - 2)\, e^{1-x}$. Son signe est celui du trinome : $-x^2 + 2x + m - 2$. Le discriminant réduit de ce trinôme est : $\Delta' = 1 + m - 2 = m - 1$.

1er cas : $\Delta' > 0$ c'est-à-dire $m > 1$: Dans ce cas le trinôme admet 2 racines :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{m-1}}{-1} = 1 - \sqrt{m-1} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{m-1}}{-1} = 1 + \sqrt{m-1}$$

Donc :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘	0

avec $f(x_1) = 2\,(1 - \sqrt{m-1})\, e^{\sqrt{m-1}}$ et $f(x_2) = 2\,(1 + \sqrt{m-1})\, e^{-\sqrt{m-1}}$

2e cas : $\Delta' = 0$ c'est-à-dire $m = 1$: Dans ce cas on a :
$f'_1(x) = (-x^2 + 2x - 1)\, e^{1-x} = -(x-1)^2\, e^{1-x} \leq 0$.

D'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	0	$-$	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	2	↘	0

3e cas : $\Delta' < 0$ c'est-à-dire $m < 1$: Dans ce cas le trinôme est du signe du coefficient de x^2 c'est-à-dire négatif. Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'_m(x) < 0$.

D'où :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$	↘	0

3) $f_m(0) = (2 - m)\, e$. Donc $f_0(0) = 2\,e$; $f_1(0) = e$; $f_2(0) = 0$.

4) $f_{m_1}(x) - f_{m_2}(x) = (m_2 - m_1)\, e^{1-x}$.
D'où, on a : $m_1 < m_2 \Leftrightarrow m_1 - m_2 < 0 \Leftrightarrow m_2 - m_1 > 0 \Leftrightarrow f_{m_1}(x) - f_{m_2}(x) > 0 \Leftrightarrow f_{m_1}(x) > f_{m_2}(x)$.

Donc si $m_1 < m_2$ alors (C_{m_1}) est au-dessus de (C_{m_2}).
D'autre part : $\lim_{x \to -\infty} [f_{m_1}(x) - f_{m_2}(x)] = \lim_{x \to -\infty} (m_2 - m_1)\, e^{1-x} = (m_2 - m_1)(+\infty) = +\infty$ car $m_2 - m_1 > 0$

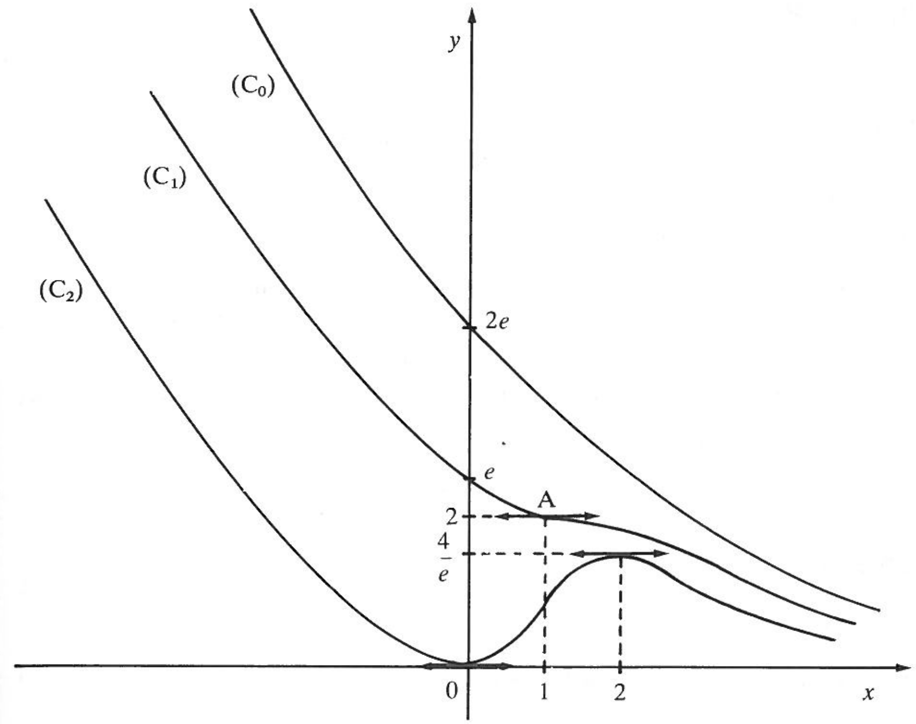
5) D'après la question **2)** on a immédiatement :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_0(x)$		$-$	
$f_0(x)$	$+\infty$	↘	0

et

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'_2(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

Pour le tableau de variation de f_1, voir la question **2)**.
Enfin, d'après la question **4)**, (C_0) est au-dessus de (C_1), et $(_1)$ est au-dessus de (C_2).



6) $\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f_2(x)\, dx = \int_0^\lambda x^2 e^{1-x}\, dx$

Posons : $\begin{cases} u = x^2 \\ v' = e^{1-x} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u' = 2x \\ v = -e^{1-x} \end{cases}$

Donc : $\mathcal{A}(\lambda) = [-x^2 e^{1-x}]_0^\lambda + 2 \int_0^\lambda x\, e^{1-x}\, dx$

De même : posons : $\begin{cases} u = x \\ v' = e^{1-x} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{1-x} \end{cases}$.

Donc : $\int_0^\lambda x\, e^{1-x}\, dx = [-x\, e^{1-x}]_0^\lambda - \int_0^\lambda -e^{1-x}\, dx$
$= [-x\, e^{1-x}]_0^\lambda - [e^{1-x}]_0^\lambda$

Par suite : $\mathcal{A}(\lambda) = [-x^2 e^{1-x}]_0^\lambda + 2\,[-x\, e^{1-x}]_0^\lambda - 2\,[e^{1-x}]_0^\lambda$
$= [(-x^2 - 2x - 2)\, e^{1-x}]_0^\lambda$
$= -(\lambda^2 + 2\lambda + 2)\, e^{1-\lambda} + 2\,e$ unité d'aire.

Enfin : $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \left[-(\lambda^2 + 2\lambda + 2)\frac{e}{e^\lambda} + 2\,e\right]$
$= \lim_{\lambda \to +\infty} \left[-\left(\frac{\lambda^2}{e^\lambda} + 2\frac{\lambda}{e^\lambda} + \frac{2}{e^\lambda}\right) e + 2\,e\right]$

Mais : $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2}{e^\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{\lambda}{e^{\frac{\lambda}{2}}}\right)^2 = \lim_{\lambda \to +\infty} \left(2\, \frac{\frac{\lambda}{2}}{e^{\frac{\lambda}{2}}}\right)^2 = (2 \times 0)^2 = 0$.

Donc : $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = [-(0 + 2 \times 0 + 0)\, e + 2\, e] = 2\,e$.

PROBLÈME 11

Soit $m \in \mathbb{R}^*$. Soit f_m définie par $\begin{cases} f_m(x) = \dfrac{m}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + m \text{ pour } x \neq 0 \\ f_m(0) = m \end{cases}$

Soit (C_m) la courbe de f_m

1) Déterminer D_{f_m}. Étudier la continuité de f_m en $x_0 = 0$.

2) Étudier la dérivabilité de f_m en $x_0 = 0$.

3) Calculer $f_m'(x)$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$.

4) Déterminer le tableau de variation de f_m suivant les valeurs de m.

5) Comparer (C_m) et (C_{-m}). Construire (C_1) dans un repère orthogonal (on prendra : $\|\vec{i}\| = 3$ cm et $\|\vec{j}\| = 1$ cm). En déduire (C_{-1}).

6) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par (C_1), et les droites d'équations : $y = 1$, $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = \lambda$ avec $\lambda < -\dfrac{1}{2}$.

En déduire $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Solutions

1) $f_m(x) = \dfrac{m}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + m$ est définie lorsque $x \neq 0$.

En plus on a : $f_m(0) = 0$. Donc $D_{f_m} = \mathbb{R}$.

D'autre part : $\lim\limits_{x \to 0_+} f_m(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} \left(m \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + m \right)$

$$= m(+\infty)(+\infty) + m = m(+\infty) + m = \begin{cases} +\infty \text{ si } m > 0 \\ -\infty \text{ si } m < 0 \end{cases}$$

Donc f_m n'est pas continue à droite en 0.

De même : $\lim\limits_{x \to 0_-} f_m(x) = \lim\limits_{x \to 0_-} m \left(\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) + m = \lim\limits_{x \to 0_-} m \left(\dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{2x}} \right)^2 + m$

$$= \lim_{x \to 0_-} m \left(2 \frac{1}{2x} e^{\frac{1}{2x}} \right)^2 + m = \lim_{t \to -\infty} m(2\, t\, e^t)^2 + m$$

$$= m(2 \times 0)^2 + m = m = f_m(0).$$

Donc f_m est continue à gauche en 0.

2) f_m n'est pas continue en 0, donc f_m n'est pas dérivable en 0.
f_m n'est pas continue à droite en 0, par suite f_m n'est pas dérivable à droite en 0.
Mais f_m est continue à gauche en 0. On cherche si f_m est dérivable à gauche en 0.
On a :

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{f_m(x) - f_m(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_-} m \left(\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to 0_-} m \left(\frac{1}{x} e^{\frac{1}{3x}} \right)^3$$

$$= \lim_{x \to 0_-} m \left(3 \frac{1}{3x} e^{\frac{1}{3x}} \right)^3 = \lim_{t \to -\infty} m(3\, t\, e^t)^3 = m(3 \times 0)^3 = 0$$

Par conséquent : f_m est dérivable à gauche en 0, et sa dérivée à gauche en 0 est nulle.

3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f_m'(x) = \dfrac{-m(2x+1)}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = 0 \times 1 + m = m$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = 0 \times 1 + m = m$.

4) Le signe de $f_m'(x)$ est celui de $-m(2x+1)$: donc ce signe dépend du signe de m. On distingue donc les cas suivants :

1er cas : $m > 0$: Dans ce cas le signe de $f_m'(x)$ est celui de $-(2x+1)$.

D'où :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	0	$-$	$0 \,\|\|$	$-$	
$f_m(x)$	m	↗	$m\left(\frac{4}{\sqrt{e}}+1\right)$	↘	$m \,\|\|\, +\infty$	↘	m

2e cas : $m < 0$: Dans ce cas on a : $-m > 0$; donc le signe de $f_m'(x)$ est celui de $(2x+1)$.

D'où :

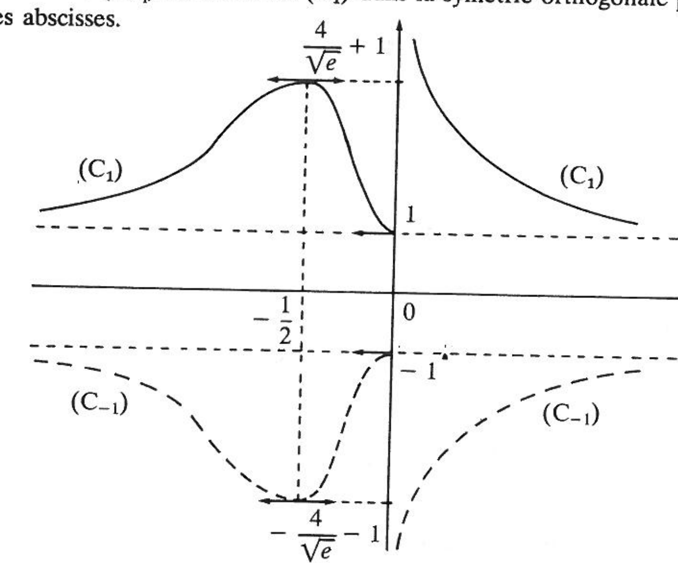
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f_m'(x)$		$-$	0	$+$	$0 \,\|\|$	$+$	
$f_m(x)$	m	↘	$m\left(\frac{4}{\sqrt{e}}+1\right)$	↗	$m \,\|\|\, -\infty$	↗	m

5) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f_{-m}(x) = -\dfrac{m}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - m = -f_m(x)$. Donc (C_m) et (C_{-m}) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

D'après la question 4) (1er cas) on a immédiatement le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	$0 \,\|\|$	$-$	
$f_1(x)$	1	↗	$\frac{4}{\sqrt{e}}+1$	↘	$1 \,\|\|\, +\infty$	↘	1

Ce tableau nous permet de tracer la courbe (C_1).
Enfin, la courbe (C_{-1}) se déduit de (C_1) dans la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.



6) $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{-\frac{1}{2}} (f_1(x) - 1)\,dx = \int_{\lambda}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = - \int_{\lambda}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} dx$

$= -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_{\lambda}^{-\frac{1}{2}} = -\left(e^{-2} - e^{\frac{1}{\lambda}}\right) = e^{\frac{1}{\lambda}} - e^{-2}$ unité d'aire

$= 3\left(e^{\frac{1}{\lambda}} - e^{-2}\right)\text{cm}^2$ car $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 3 \times 1 \text{ cm}^2 = 3 \text{ cm}^2$.

Enfin : $\displaystyle\lim_{\lambda \to -\infty} \mathscr{A}(\lambda) = 3(1 - e^{-2})$ cm².

Le nombre e^{ix}

RAPPELS

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{array}\right\} \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \; ; \; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\left.\begin{array}{l} (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \\ (e^{-ix})^n = e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx \end{array}\right\} \Rightarrow \cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

CONSÉQUENCE

$$e^{i\alpha} + 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right) = e^{i\frac{\alpha}{2}}\, 2 \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$e^{i\alpha} - 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right) = e^{i\frac{\alpha}{2}}\, 2i \sin\frac{\alpha}{2}$$

EXERCICE 1

Soit $S_1 = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}$

$S_2 = \sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{3\pi}{9} + \sin\frac{5\pi}{9} + \sin\frac{7\pi}{9}$.

1) Calculer $S_1 + i\,S_2$.

2) En déduire les valeurs de S_1 et S_2.

Solutions

1) $S_1 + i\,S_2 = e^{i\frac{\pi}{9}} + e^{i\frac{3\pi}{9}} + e^{i\frac{5\pi}{9}} + e^{i\frac{7\pi}{9}}$

$$= e^{i\frac{\pi}{9}}\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{9}} + e^{i\frac{4\pi}{9}} + e^{i\frac{6\pi}{9}}\right)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{9}}\left[1 + e^{i\frac{2\pi}{9}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{9}}\right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{9}}\right)^3\right]$$

$$= e^{i\frac{\pi}{9}}\, \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{9}}\right)^4}{1 - e^{i\frac{2\pi}{9}}} = e^{i\frac{\pi}{9}}\, \frac{e^{i\frac{8\pi}{9}} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{9}} - 1}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{9}}\, \frac{e^{i\frac{4\pi}{9}}\left(e^{i\frac{4\pi}{9}} - e^{-i\frac{4\pi}{9}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{9}}\left(e^{i\frac{\pi}{9}} - e^{-i\frac{\pi}{9}}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{9}}\, \frac{2i \sin\frac{4\pi}{9}}{2i \sin\frac{\pi}{9}}$$

$$= e^{i\frac{4\pi}{9}}\, \frac{\sin\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}$$

Mais : $\sin\frac{\pi}{9} = \sin\left(\pi - \frac{8\pi}{9}\right) = \sin\frac{8\pi}{9} = 2 \sin\frac{4\pi}{9} \cos\frac{4\pi}{9}$.

Donc : $S_1 + i\,S_2 = e^{i\frac{4\pi}{9}}\, \dfrac{1}{2\cos\frac{4\pi}{9}} = \dfrac{\cos\frac{4\pi}{9} + i \sin\frac{4\pi}{9}}{2\cos\frac{4\pi}{9}}$

$$= \frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}\,\text{tg}\,\frac{4\pi}{9}.$$

2) D'où : $S_1 = \frac{1}{2}$ et $S_2 = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,\frac{4\pi}{9}$.

EXERCICE 2

Soit $S_1 = \cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{4\pi}{11} + \cos\frac{6\pi}{11} + \cos\frac{8\pi}{11} + \cos\frac{10\pi}{11}$

$S_2 = \sin\frac{2\pi}{11} + \sin\frac{4\pi}{11} + \sin\frac{6\pi}{11} + \sin\frac{8\pi}{11} + \sin\frac{10\pi}{11}$

Calculer $S_1 + i\,S_2$. En déduire les valeurs de S_1 et S_2.

Solutions

$$S_1 + i\,S_2 = e^{i\frac{2\pi}{11}} + e^{i\frac{4\pi}{11}} + e^{i\frac{6\pi}{11}} + e^{i\frac{8\pi}{11}} + e^{i\frac{10\pi}{11}}$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{11}}\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{11}} + e^{i\frac{4\pi}{11}} + e^{i\frac{6\pi}{11}} + e^{i\frac{8\pi}{11}}\right)$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{11}}\left[1 + e^{i\frac{2\pi}{11}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^3 + \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^4\right]$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{11}}\,\frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^5}{1 - e^{i\frac{2\pi}{11}}} = e^{i\frac{2\pi}{11}}\,\frac{e^{i\frac{10\pi}{11}} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{11}} - 1}$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{11}}\,\frac{e^{i\frac{5\pi}{11}}\left(e^{i\frac{5\pi}{11}} - e^{-i\frac{5\pi}{11}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{11}}\left(e^{i\frac{\pi}{11}} - e^{-i\frac{\pi}{11}}\right)}$$

$$= e^{i\frac{6\pi}{11}}\,\frac{2i\sin\frac{5\pi}{11}}{2i\sin\frac{\pi}{11}} = e^{i\frac{6\pi}{11}}\,\frac{\sin\frac{5\pi}{11}}{\sin\frac{\pi}{11}}$$

Mais : $\sin\frac{\pi}{11} = \sin\left(\pi - \frac{10\pi}{11}\right) = \sin\frac{10\pi}{11} = 2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$.

Donc : $S_1 + S_2 = e^{i\frac{6\pi}{11}}\,\dfrac{1}{2\cos\frac{5\pi}{11}} = \dfrac{\cos\frac{6\pi}{11} + i\sin\frac{6\pi}{11}}{2\cos\frac{5\pi}{11}}$

Or : $\cos\frac{6\pi}{11} = \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{11}\right) = -\cos\frac{5\pi}{11}$

Et : $\sin\frac{6\pi}{11} = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{11}\right) = \sin\frac{5\pi}{11}$.

Par suite : $S_1 + i\,S_2 = \dfrac{-\cos\frac{5\pi}{11} + i\sin\frac{5\pi}{11}}{2\cos\frac{5\pi}{11}} = -\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{1}{2}\,tg\,\dfrac{5\pi}{11}$.

Par conséquent : $S_1 = -\dfrac{1}{2}$; $S_2 = \dfrac{1}{2}\,tg\,\dfrac{5\pi}{11}$.

Linéarisation

RAPPELS DU COURS

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle factoriel n, le nombre noté :
$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \times 1$.
Par convention, on pose : $0! = 1$.

Considérons le nombre noté : $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $p \leqslant n$.

Alors on a : $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2) : (x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} c_n^p\, x^p y^{n-p}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} z = \cos x + i\sin x \\ \bar z = \cos x - i\sin x \end{array}\right\} \Rightarrow \cos x = \frac{z + \bar z}{2}\ ;\ \sin x = \frac{z - \bar z}{2i}$$

$$\left.\begin{array}{l} z^n = \cos nx + i\sin nx \\ (\bar z)^n = \cos nx - i\sin nx \end{array}\right\} \Rightarrow \cos nx = \frac{z^n + (\bar z)^n}{2}\ ;\ \sin nx = \frac{z^n - (\bar z)^n}{2i}$$

Enfin : $z\bar z = |z|^2 = 1$; $z^n(\bar z)^n = (z\bar z)^n = 1^n = 1$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{array}\right\} \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\ ;\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{inx} = (e^{ix})^n = \cos nx + i\sin nx \\ e^{-inx} = (e^{-ix})^n = \cos nx - i\sin nx \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos nx = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ \sin nx = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \end{array}\right.$$

EXERCICE 1

Linéariser $f(x) = \sin^3 x$.

Solutions

1re méthode :

$\sin^3 x = \sin x \sin^2 x = \sin x\left(\dfrac{1 - \cos 2x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\sin x - \sin x \cos 2x)$.

Mais : $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

Donc : $\sin x \cos 2x = \dfrac{1}{2}[\sin 3x + \sin(-x)] = \dfrac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$.

D'où : $\sin^3 x = \dfrac{1}{2}\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\sin 3x + \dfrac{1}{2}\sin x\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 3x\right) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x).$$

2^e méthode

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{(2i)^3}(e^{ix} - e^{-ix})^3 = \frac{i}{8}(e^{ix} + (-e^{-ix}))^3$$

$$= \frac{i}{8}[C_3^0(-e^{-ix})^3 + C_3^1 e^{ix}(-e^{-ix})^2 + C_3^2 e^{i2x}(-e^{-ix}) + C_3^3 e^{i3x}]$$

$$= \frac{i}{8}[-e^{-i3x} + 3e^{ix}e^{-i2x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + e^{i3x}]$$

$$= \frac{i}{8}[-e^{-i3x} + 3e^{-ix} - 3e^{ix} + e^{i3x}]$$

$$= \frac{i}{8}[(e^{i3x} - e^{-i3x}) - 3(e^{ix} - e^{-ix})]$$

$$= \frac{i}{8}[2i\sin 3x - 6i\sin x]$$

$$= \frac{-2}{8}(\sin 3x - 3\sin x) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x).$$

3^e méthode

$$\sin^3 x = \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{(2i)^3}(z - \bar{z})^3 = \frac{i}{8}(z + (-\bar{z}))^3$$

$$= \frac{i}{8}[C_3^0(-\bar{z})^3 + C_3^1 z(-\bar{z})^2 + C_3^2 z^2(-\bar{z}) + C_3^3 z^3]$$

$$= \frac{i}{8}[-(\bar{z})^3 + 3z(\bar{z})^2 - 3z^2\bar{z} + z^3]$$

$$= \frac{i}{8}[-(\bar{z})^3 + 3z\bar{z}\bar{z} - 3zz\bar{z} + z^3]$$

$$= \frac{i}{8}[-(\bar{z})^3 + 3\bar{z} - 3z + z^3] \text{ car } z\bar{z} = |z|^2 = 1.$$

$$= \frac{i}{8}[z^3 - (\bar{z})^3 - 3(z - \bar{z})]$$

$$= \frac{i}{8}[2i\sin 3x - 6i\sin x]$$

$$= \frac{-2}{8}(\sin 3x - 3\sin x) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x).$$

EXERCICE 2

Linéariser $f(x) = \cos^4 x$.

Solutions

1re méthode

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2$$

$$= \frac{1}{4}(1 + \cos^2 2x + 2\cos 2x) = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{1 + \cos 4x}{2} + 2\cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

2^e méthode

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}(e^{ix} + e^{-ix})^4$$

$$= \frac{1}{16}[C_4^0 e^{-i4x} + C_4^1 e^{ix}e^{-i3x} + C_4^2 e^{i2x}e^{-i2x} + C_4^3 e^{i3x}e^{-ix} + C_4^4 e^{i4x}]$$

$$= \frac{1}{16}[e^{-i4x} + 4e^{-i2x} + 6 + 4e^{i2x} + e^{i4x}]$$

$$= \frac{1}{16}[e^{i4x} + e^{-i4x} + 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6]$$

$$= \frac{1}{16}[2\cos 4x + 8\cos 2x + 6] = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

3^e méthode :

$$\cos^4 x = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}(z + \bar{z})^4$$

$$= \frac{1}{16}[C_4^0(\bar{z})^4 + C_4^1 z(\bar{z})^3 + C_4^2 z^2(\bar{z})^2 + C_4^3 z^3\bar{z} + C_4^4 z^4]$$

$$= \frac{1}{16}[(\bar{z})^4 + 4z\bar{z}(\bar{z})^2 + 6(z\bar{z})^2 + 4z^2 z\bar{z} + z^4]$$

$$= \frac{1}{16}[(\bar{z})^4 + 4(\bar{z})^2 + 6 + 4z^2 + z^4] \text{ car } z\bar{z} = |z|^2 = 1$$

$$= \frac{1}{16}[z^4 + (\bar{z})^4 + 4(z^2 + (\bar{z})^2) + 6]$$

$$= \frac{1}{16}[2\cos 4x + 8\cos 2x + 6] = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

Remarque :

La linéarisation est souvent utile pour intégrer certaines fonctions.

Par exemple : $\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) dx$

$$= \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c.$$

CHAPITRE 8

Primitives et Intégrales

RAPPELS

Définitions et remarque :

Soit f une fonction ayant une primitive F sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On appelle intégrale indéfinie de f sur I, une primitive quelconque de f sur I et on la note par : $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ avec c une constante réelle arbitraire.

Si $a \in$ I et $b \in$ I, alors on appelle intégrale définie de f sur $[a\,,b]$, le nombre réel noté :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Dans la formule $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, il est nécessaire que F soit continue sur $[a\,,b]$; par exemple, $\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx$ est définie lorsque ($a > 0$ et $b > 0$) ou ($a < 0$ et $b < 0$) car $\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c$ exige $x \neq 0$.

Formules

Dans les formules suivantes, u désigne une fonction de la variable réelle x, u' sa dérivée, et c une constante réelle arbitraire.

D'autre part, pour chaque formule il faut préciser l'intervalle où l'intégrale est définie.

Enfin la formule générale des intégrales est : $\int u'(x)\,dx = u(x) + c$.

Et à partir de cette formule on déduit les formules suivantes :

1) $\displaystyle\int u'u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ avec $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$.

Conséquence : $(\forall\, n \in \mathbb{N} - \{1\})$: $\displaystyle\int \frac{u'}{u^n}\,dx = \int u'u^{-n}dx = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + c$

$$= \frac{-1}{(n-1)\,u^{n-1}} + c$$

Exemple : $\displaystyle\int \frac{u'}{u^2}\,dx = -\frac{1}{u} + c$

2) $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u}}\,dx = 2\sqrt{u} + c$

3) $\displaystyle\int u' \cos u\,dx = \sin u + c$

$\displaystyle\int u' \sin u\,dx = -\cos u + c$

$\displaystyle\int u'\,(1 + \operatorname{tg}^2 u)\,dx = \int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \operatorname{tg} u + c$

$\displaystyle\int u'\,(1 + \operatorname{cotg}^2 u)\,dx = \int \frac{u'}{\sin^2 u}\,dx = -\operatorname{cotg} u + c$

4) $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \operatorname{Arc\,sin} u + c$

$\displaystyle\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \operatorname{Arc\,cos} u + c_1 = -\operatorname{Arc\,sin} u + c_2$

$\displaystyle\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{Arc\,tg} u + c$

5) Intégration par parties :

$\displaystyle\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$

6) Intégration par changement de variable : la méthode est expliquée dans les exercices 7, 8, la 2[e] partie de l'exercice 9, et la 2[e] partie de l'exercice 13.

7) Propriétés :

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$

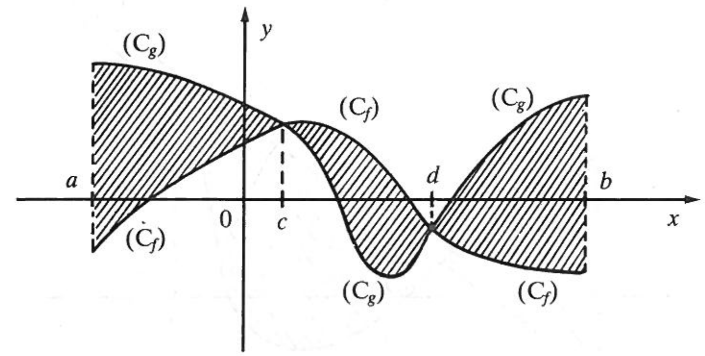
$\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ avec k une constante réelle non nulle.

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

8) Si f admet des primitives sur $[a\,,b]$ avec $a < b$, alors on appelle valeur moyenne, ou plus simplement moyenne de f sur $[a\,,b]$, le nombre réel $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Calcul d'aire :

Considérons 2 fonctions f et g dont les courbes représentatives de leurs variations sur $[a\,,b]$ sont les courbes (C_f) et (C_g) suivantes :



Alors l'aire du domaine plan limité par (C_f), (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

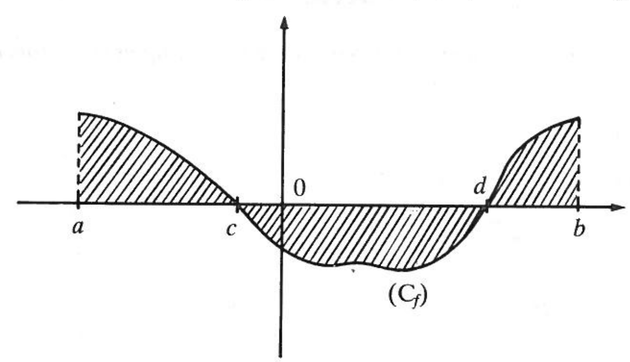
$$\mathcal{A} = \int_a^c (g(x) - f(x))\,dx + \int_c^d (f(x) - g(x))\,dx + \int_d^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

Cette aire est appelée parfois aire arithmétique ou géométrique. Elle est exprimée en unités d'aire. L'unité d'aire est l'aire du carré (ou du rectangle) construit sur les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ des axes.

Par exemple si $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 2$ cm, alors l'unité d'aire est 4 cm².

Cas particulier

Soit f une fonction dont la courbe représentative sur $[a\,,b]$ est la courbe (C_f) suivante :



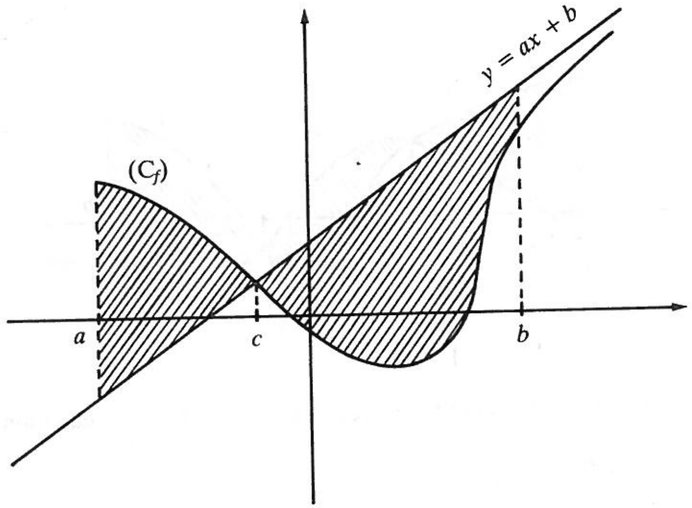
Alors l'aire du domaine plan limité par (C_f), l'axe $x'x$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d -f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

Autre cas particulier :

L'aire du domaine plan limité par (C_f), la droite d'équation $y = ax + b$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$

est : $\mathscr{A} = \int_a^c (f(x) - (ax + b))\, dx + \int_c^b ((ax + b) - f(x))\, dx$



Remarque :

Les exercices qu'on va résoudre maintenant sont groupés en 3 parties :

— Partie A : pour les intégrales des fonctions générales, des fonctions trigonométriques et des fonctions Arcs.

— Partie B : pour les intégrales logarithmiques.

— Partie C : pour les intégrales des fonctions exponentielles.

Partie A

Intégrales des fonctions générales, des fonctions trigonométriques et des fonctions Arcs.

EXERCICE 1

Calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int \frac{4x^5 + 2x^3 - x^2 + 3}{x^2}\, dx$

2) $B = \int \frac{x^2}{(1 - 2x^3)^2}\, dx$

3) $E = \int \frac{x}{(3x^2 - 2)^3}\, dx$

4) $F = \int \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{3x^2 - x^3}}\, dx$

Solutions

1) $A = \int \left(4x^3 + 2x - 1 + \frac{3}{x^2}\right) dx = x^4 + x^2 - x - \frac{3}{x} + c$

2) $B = -\frac{1}{6} \int \frac{(1 - 2x^3)'}{(1 - 2x^3)^2}\, dx = -\frac{1}{6}\, \frac{-1}{1 - 2x^3} + c = \frac{1}{6\,(1 - 2x^3)} + c$

3) $E = \frac{1}{6} \int \frac{(3x^2 - 2)'}{(3x^2 - 2)^3}\, dx = \frac{1}{6}\, \frac{-1}{2(3x^2 - 2)^2} + c = \frac{-1}{12(3x^2 - 2)^2} + c$

4) $F = -\frac{1}{3} \int \frac{(3x^2 - x^3)'}{\sqrt{3x^2 - x^3}}\, dx = -\frac{2}{3} \sqrt{3x^2 - x^3} + C.$

EXERCICE 2

Calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int \cos^n x \sin x\, dx$, avec $n \in \mathbb{N}$.

2) $B = \int \frac{\cos x}{\sin^n x}\, dx$, avec $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

3) $E = \int \frac{\sin x}{\sin x - 1}\, dx$;

4) $F = \int \frac{\cos x}{\cos x + 1}\, dx.$

Solutions

1) $A = -\int \cos^n x\, (\cos x)'\, dx = -\frac{(\cos x)^{n+1}}{n + 1} + C.$

2) $B = \int \frac{(\sin x)'}{\sin^n x}\, dx = \frac{-1}{(n - 1)\,(\sin x)^{n-1}} + C.$

3) $E = \int \frac{\sin x\,(\sin x + 1)}{\sin^2 x - 1}\, dx = \int \frac{\sin^2 x + \sin x}{-\cos^2 x}\, dx.$

$= \int -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx + \int -\frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int -\operatorname{tg}^2 x\, dx + \int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}\, dx.$

$= \int (1 - (\operatorname{tg} x)')\, dx + \int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}\, dx = x - \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C.$

Autre méthode :

$(E) = \int \frac{\sin x - 1 + 1}{\sin x - 1}\, dx = \int \frac{\sin x - 1}{\sin x - 1}\, dx + \int \frac{1}{\sin x - 1}\, dx$

$= \int dx + \int \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x - 1}\, dx = x + \int \frac{\sin x + 1}{-\cos^2 x}\, dx$

$= x - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = x + \int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}\, dx - \int (\operatorname{tg} x)'\, dx$

$= x - \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x + C.$

4) $F = \int \frac{\cos x + 1 - 1}{\cos x + 1}\, dx = \int \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}\, dx - \int \frac{1}{\cos x + 1}\, dx$

$$= \int dx - \int \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\, dx = x - \int \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}\, dx$$

$$= x - \int \left(\text{tg}\,\frac{x}{2}\right)' dx = x - \text{tg}\,\frac{x}{2} + C.$$

Autre méthode :

$$F = \int \frac{\cos x\,(\cos x - 1)}{\cos^2 x - 1}\, dx = \int \frac{\cos^2 x - \cos x}{-\sin^2 x}\, dx = \int -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\, dx + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int -\text{cotg}^2 x\, dx + \int \frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}\, dx = \int \left((\text{cotg}\, x)' + 1\right) dx - \frac{1}{\sin x} + C.$$

$$= \text{cotg}\, x + x - \frac{1}{\sin x} + C = x + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\sin x} + C = x + \frac{\cos x - 1}{\sin x} + C$$

$$= x + \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} + C = x - \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + C = x - \text{tg}\,\frac{x}{2} + C.$$

EXERCICE 3

Calculer $(\text{tg}\,(ax + b))'$; En déduire l'expression de $\int \text{tg}^2\,(ax + b)\, dx$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

Solutions

$(\text{tg}\,(ax + b))' = a\left(1 + \text{tg}^2\,(ax + b)\right)$

Donc : $\int \text{tg}^2\,(ax + b)\, dx = \int \left[\frac{1}{a}(\text{tg}\,(ax + b))' - 1\right] dx$

$$= \frac{1}{a}\int (\text{tg}\,(ax + b))'\, dx - \int dx$$

$$= \frac{1}{a}\,\text{tg}\,(ax + b) - x + C.$$

EXERCICE 4

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}$

3) $\int \frac{dx}{1 + 3x^2}$

4) $\int \frac{dx}{3 + x^2}$

5) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4 - x^4}}$

6) $\int \frac{dx}{16 + 25x^2}$

Solutions

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\sqrt{3}x)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{(\sqrt{3}\,x)'}{\sqrt{1 - (\sqrt{3}x)^2}}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{Arc sin}\,(\sqrt{3}x) + C$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{3\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} =$

$$\int \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}\, dx = \text{Arc sin}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

3) $\int \frac{dx}{1 + 3x^2} = \int \frac{dx}{1 + (\sqrt{3}x)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{(\sqrt{3}x)'}{1 + (\sqrt{3}x)^2}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{Arc tg}\,(\sqrt{3}x) + C$

4) $\int \frac{dx}{3 + x^2} = \int \frac{dx}{3\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} =$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)'}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{Arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

5) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{4 - x^4}} = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{4\left(1 - \frac{x^4}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2}} =$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2}}\, dx = \frac{1}{2}\,\text{Arc sin}\,\frac{x^2}{2} + C$$

6) $\int \frac{dx}{16 + 25x^2} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{1 + \frac{25}{16}x^2} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{5}{4}x\right)^2}$

$$= \frac{1}{16}\,\frac{4}{5}\int \frac{\left(\frac{5}{4}x\right)'}{1 + \left(\frac{5}{4}x\right)^2}\, dx = \frac{1}{20}\,\text{Arc tg}\left(\frac{5}{4}x\right) + C$$

EXERCICE 5

Calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 26}{(x + 3)^2}\, dx$;

2) $B = \int \frac{2x^5 + 4x^3 + 3x^2 + 4}{x^2 + 2}\, dx$

Solutions

On a ici une intégration des fonctions rationnelles. On utilise la division euclidienne (dans l'anneau des polynômes) du numérateur par le dénominateur ; et on obtient :

1) $A = \int \left(x - 3 + \frac{1}{(x+3)^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{1}{x+3} + C$

2) $B = \int \left(2x^3 + 3 - \frac{2}{x^2+2}\right) dx = \int (2x^3+3)\, dx - 2\int \frac{1}{x^2+2}\, dx.$

$$= \frac{x^4}{2} + 3x - \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1}\, dx = \frac{x^4}{2} + 3x - \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\, dx$$

$$= \frac{x^4}{2} + 3x - \sqrt{2}\int \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\, dx = \frac{x^4}{2} + 3x - \sqrt{2}\,\text{Arc tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

EXERCICE 6

Calculer $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$

Solution

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\,(\text{tg}^2 x + 3)} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\text{tg}^2 x + 3}\, dx = \int \frac{(\text{tg}\, x)'}{\text{tg}^2 x + 3}\, dx$$

$$= \int \frac{(\text{tg}\, x)'}{3\left(\frac{\text{tg}^2 x}{3} + 1\right)}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{(\text{tg}\, x)'}{\left(\frac{\text{tg}\, x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\left(\frac{\text{tg}\, x}{\sqrt{3}}\right)'}{\left(\frac{\text{tg}\, x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{Arc tg}\left(\frac{\text{tg}\, x}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

EXERCICE 7

Calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos^2 x - 4}\, dx$ (poser $t = \sin x$)

2) $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}}\, dx$ (poser $t = \cos x$)

Solutions

1) $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\, dx$

$x = 0 \Rightarrow t = \sin 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\cos^2 x - 4 = 1 - \sin^2 x - 4 = -\sin^2 x - 3 = -t^2 - 3.$

$$\text{D'où : } A = \int_0^1 \frac{dt}{-t^2-3} = -\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\frac{t^2}{3}+1} = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1 \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)'}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\text{Arc tg}\,\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

2) $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\, dx$

$x = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$\sin^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x + 1 = 2 - \cos^2 x = 2 - t^2.$

$$\text{D'où : } B = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-dt}{\sqrt{2-t^2}} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{2\left(1-\frac{t^2}{2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}}\, dt$$

$$= \left[\text{Arc sin}\,\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \text{Arc sin}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \text{Arc sin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

EXERCICE 8

Calculer $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\text{Arc cos}\, x\, dx$ (poser $t = \text{Arc cos}\, x$).

Solution

$$\begin{cases} t = \text{Arc cos}\, x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Donc : $x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t\, dt$

$x = -1 \Rightarrow t = \text{Arc cos}(-1) = \pi$

$x = 1 \Rightarrow t = \text{Arc cos}\, 1 = 0$

D'où : $I = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\, t\,(-\sin t)\, dt = -\int_{\pi}^{0} \sqrt{\sin^2 t}\, t \sin t\, dt$

$= \int_{0}^{\pi} t \sin^2 t\, dt$ (car $\sqrt{\sin^2 t} = \sin t$ car $\sin t \geqslant 0$ pour $t \in [0, \pi]$).

$= \int_0^{\pi} t \dfrac{1-\cos 2t}{2} dt = \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} t\, dt - \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} t \cos 2t\, dt.$

$= \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} - \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} t\cos 2t\, dt = \dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} t \cos 2t\, dt.$

On pourra calculer par parties l'intégrale $\int_0^{\pi} t \cos 2t\, dt$.

En effet : posons : $\begin{cases} u = t \\ v' = \cos 2t \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2t. \end{cases}$

Donc : $\int_0^{\pi} t \cos 2t\, dt = \dfrac{1}{2}\left[t \sin 2t\right]_0^{\pi} - \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2t\, dt$

$= \dfrac{1}{2}(0-0) + \dfrac{1}{4}\left[\cos 2t\right]_0^{\pi} = \dfrac{1}{4}(1-1) = 0.$

Par suite : $I = \dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{1}{2} \times 0 = \dfrac{\pi^2}{4}$.

EXERCICE 9

Calculer $A = \int_{-1}^{1} x \operatorname{Arc\,sin} x\, dx$

Solution

On utilise une intégration par parties. En effet :

Posons : $\begin{cases} u' = x \\ v = \operatorname{Arc\,sin} x \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = \dfrac{x^2}{2} \\ v' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

Donc : $A = \left[\dfrac{x^2}{2} \operatorname{Arc\,sin} x\right]_{-1}^{1} - \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \dfrac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \dfrac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$= \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx - \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{Arc\,sin} x\right]_{-1}^{1}$

$= \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx.$

On pourra calculer $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$ en posant $x = \sin t$ avec $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

En effet : $\begin{cases} x = \sin t \\ t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \operatorname{Arc\,sin} x \\ x \in [-1, 1]. \end{cases}$

Donc : $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\, dt$

$x = -1 \Rightarrow t = \operatorname{Arc\,sin}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$

$x = 1 \Rightarrow t = \operatorname{Arc\,sin} 1 = \dfrac{\pi}{2}$

D'où : $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\, \cos x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 x}\, \cos x\, dx$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ (car $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$ car $\cos x \geqslant 0$ pour $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$)

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\, dx$

$= \dfrac{1}{2}\left[x + \dfrac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\times 0 + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\times 0\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Conclusion : $A = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE 10

Calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int_1^{\sqrt{3}} x \text{ Act tg} \frac{1}{x} dx$; **2)** $B = \int_1^{\sqrt{2}} x \text{ Arc sin} \frac{1}{x} dx$

Solutions

On utilise une intégration par parties.

1) Posons : $\begin{cases} u' = x \\ v = \text{Arc tg} \frac{1}{x} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = \frac{x^2}{2} \\ v' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2+1} \end{cases}$

$$\text{D'où : } A = \left[\frac{x^2}{2} \text{Arc tg} \frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{3}{2}\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left[x - \text{Act tg} x\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

2) Posons : $\begin{cases} u' = x \\ v = \text{Arc sin} \frac{1}{x} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = \frac{x^2}{2} \\ v' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$ car $x \in [1, \sqrt{2}]$

$$\text{D'où : } B = \left[\frac{x^2}{2} \text{Arc sin} \frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{(x^2-1)'}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2-1}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 11

1) Calculer par parties l'intégrale $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\left(\text{poser } u' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } v = x^2\right)$

2) En déduire l'expression de $A = \int x^2 \text{ Arc sin } x \, dx$.

Solutions

1) $\begin{cases} u' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x^2 \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} \\ v' = 2x \end{cases}$

$$\text{Donc : } \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = -x^2\sqrt{1-x^2} - \int -2x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \int (1-x^2)'\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \int (1-x^2)'(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + C$$

$$= \sqrt{1-x^2}\left(-x^2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x^2\right) = -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$$

2) On utilise encore une intégration par parties.

Posons : $\begin{cases} u' = x^2 \\ v = \text{Arc sin } x \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = \frac{x^2}{3} \\ v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

$$\text{Donc : } A = \frac{x^3}{3}\text{Arc sin } x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\text{Arc sin } x + \frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$$

EXERCICE 12

1) Calculer : $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

2) En déduire l'expression de $A = \int \sqrt{1-4x^2}\, dx$

3) En déduire enfin l'expression de $B = \int x \text{ Arc sin } 2x\, dx$

Solutions

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x)'}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx = \frac{1}{2}\text{Arc sin }(2x) + C$

2) On utilise une intégration par partie. En effet :

Posons : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \sqrt{1-4x^2} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = x \\ v' = \frac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}} \end{cases}$

$$\text{D'où : } A = x\sqrt{1-4x^2} - \int \frac{-4x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{1-4x^2} - \int \frac{1-4x^2-1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{1-4x^2} - \int \frac{1-4x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$= x\sqrt{1-4x^2} - \int \sqrt{1-4x^2}\,dx + \frac{1}{2}\,\text{Arc}\sin(2x) + C$$

$$= x\sqrt{1-4x^2} - A + \frac{1}{2}\,\text{Arc}\sin(2x) + C$$

Par conséquent : $2A = x\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{2}\,\text{Arc}\sin(2x) + C$

C'est-à-dire : $A = \frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{4}\,\text{Arc}\sin(2x) + C$

3) On utilise encore une intégration par parties. En effet :

Posons : $\begin{cases} u' = x \\ v = \text{Arc}\sin 2x \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = \dfrac{x^2}{2} \\ v' = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \end{cases}$

$$\text{Donc : } B = \frac{x^2}{2}\,\text{Arc}\sin 2x - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{Arc}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{-4x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{Arc}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1-4x^2-1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{Arc}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1-4x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{Arc}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \sqrt{1-4x^2}\,dx - \frac{1}{8}\,\text{Arc}\sin(2x) + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\text{Arc}\sin 2x + \frac{1}{8}x\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{16}\,\text{Arc}\sin(2x) - \frac{1}{8}\,\text{Arc}\sin(2x) + C$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{16}\right)\text{Arc}\sin 2x + \frac{1}{8}x\sqrt{1-4x^2} + C.$$

EXERCICE 13

1) Représenter graphiquement $f(x) = \dfrac{3\sin x}{\sin^2 x - 4}$

2) Calculer l'aire du domaine plan compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ (poser $t = \cos x$).

(On donne $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3$ cm).

Solutions

1) $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sin^2 x - 4 \neq 0$. Donc : $D_f = \mathbb{R}$.
D'autre part : $P(\sin x) = 2\pi$; $P(\sin^2 x) = \pi$; donc : $P(f) = 2\pi$.
Il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π par exemple $[-\pi, \pi] = I$.
Mais f est impaire. Donc le domaine d'étude se réduit à $[0, \pi]$. Enfin $f(\pi - x) = f(x)$.

Par suite, la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie.

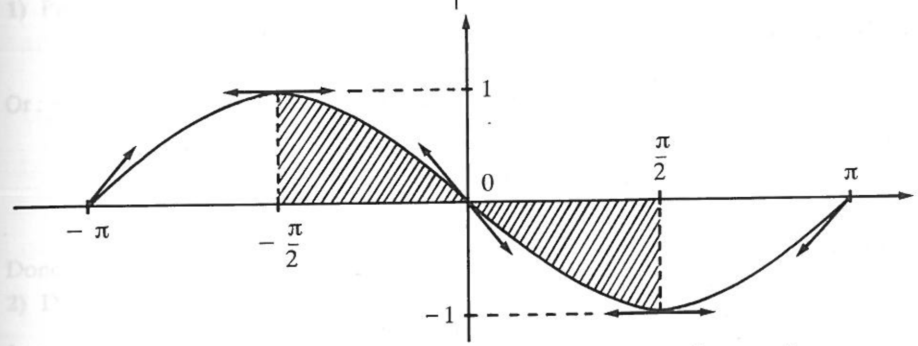
Donc le domaine d'étude de f est $D_E = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \dfrac{-3\cos x\,(4 + \sin^2 x)}{(\sin^2 x - 4)^2}$

$(\forall x \in D_E) : \cos x \geqslant 0$ et $4 + \sin^2 x > 0$.

Donc : $(\forall x \in D_E) : f'(x) < 0$. D'où :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-\frac{3}{4}$	$-$	0
$f(x)$	0	↘	-1



2) On voit que la courbe (C_f) est au-dessus de l'axe $x'x$ pour $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$, et elle est au-dessous de cet axe pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Donc l'aire demandée est :

$$\mathscr{A} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} -f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx$$

On pourra calculer ces intégrales en posant $t = \cos x$. En effet, on a :

$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx$

$x = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$x = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1$

$x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0.$

$\sin^2 x - 4 = 1 - \cos^2 x - 4 = -\cos^2 x - 3 = -t^2 - 3.$

$$\text{Donc}: \mathscr{A} = 3\int_0^1 \frac{-\,dt}{-t^2-3} + 3\int_0^1 \frac{-\,dt}{-t^2-3}$$

$$= 3\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} + 3\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = 6\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = 2\sqrt{3}\int_0^1 \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)'}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dt = 2\sqrt{3}\left[\text{Arc tg}\,\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$= 2\sqrt{3}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\ \text{unité d'aire} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \times 9\ \text{cm}^2 = 3\pi\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

REMARQUE

Maintenant, on va voir quelques conséquences des primitives à l'aide des exercices suivants :

EXERCICE 14

1) Soit $f(x) = \text{Arc tg}\,\frac{2x}{1-x^2}$. Déterminer D_f et D_E.

2) Démontrer que f est dérivable sur D_E et calculer $f'(x)$ pour $x \in D_E$.

3) En déduire une expression simple de $f(x)$ sur D_E.

Solutions

1) Posons $u(x) = \frac{2x}{1-x^2}$; $D_f = D_u = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

f est impaire. Donc : $D_E = [0, +\infty[- \{1\}$.

2) u est dérivable sur D_E ; donc f aussi.

$$(\forall x \in D_E) : f'(x) = \frac{u'(u)}{1+(u(x))^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

3) $(\forall x \in D_E) : f'(x) = \frac{2}{1+x^2} = 2\,(\text{Arc tg}\,x)'$

$$\text{D'où} : f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2\,\text{Arc tg}\,x + b \text{ pour } x \in [0, 1[\\ f_2(x) = 2\,\text{Arc tg}\,x + c \text{ pour } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

Déterminons les constantes réelles b et c.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = f_1(0) \\ \text{Mais} : f(0) = \text{Arc tg}\,0 = 0 \\ \text{Et} : f_1(0) = 2\,\text{Arc tg}\,0 + b = b \end{array}\right\} \Rightarrow b = 0$$

De même : choisissons une valeur particulière $\in]1, +\infty[$ pour déterminer c.

On choisit par exemple $\sqrt{3}$. On a donc :

$f(\sqrt{3}) = f_2(\sqrt{3})$ car $\sqrt{3} \in]1, +\infty[$.

Mais : $f(\sqrt{3}) = \text{Arc tg}\,\frac{2\sqrt{3}}{1-3} = \text{Arc tg}\,(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

Et : $f_2(\sqrt{3}) = 2\,\text{Arc tg}\,\sqrt{3} + c = 2\,\frac{\pi}{3} + c$.

Donc : $-\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + c \Leftrightarrow c = -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\pi$.

$$\text{Conclusion} : f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2\,\text{Arc tg}\,x \text{ pour } x \in [0, 1[\\ f_2(x) = 2\,\text{Arc tg}\,x - \pi \text{ pour } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

EXERCICE 15

1) Soit $f(x) = \text{Arc sin}\,\frac{2x}{1+x^2}$. Déterminer D_f et D_E.

2) Démontrer que f est dérivable sur $D_E - \{1\}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in D_E - \{1\}$.

3) En déduire une expression simple de $f(x)$ pour $x \in D_E - \{1\}$.

4) Peut-on étendre cette expression simple à $x_0 = 1$.

Solutions

1) Posons $u(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; f est définie lorsque $-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$.

$$\text{Or} : -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2x \leqslant 1 + x^2 \text{ car } 1 + x^2 > 0 \\ \frac{2x}{1+x^2} \geqslant -1 \Leftrightarrow 2x \geqslant -1 - x^2 \text{ car } 1 + x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ x^2 + 2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc $D_f = \mathbb{R}$. En plus : f est impaire. Donc $D_E = [0, +\infty[$.

2) $D_E - \{1\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

$$f \text{ est dérivable sur } D_E - \{1\} \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ est dérivable sur } D_E - \{1\} \\ u(D_E - \{1\}) \subset]-1, 1[. \end{cases}$$

Or : u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $D_E - \{1\}$.

$(\forall x \in \mathbb{R}) : u'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. Donc :

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	−	
$u(x)$	0	↗	1	↘	0

Par suite : $u(D_E - \{1\}) = [0, 1[\subset]-1, 1[$.

Donc : f est dérivable sur $D_E - \{1\}$.

f n'est pas dérivable en 1 car $u(1) = 1 \notin]-1, 1[$.

$$(\forall x \in D_E - \{1\}) : f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} \text{ pour } x \in [0, 1[\\ \frac{-2}{1+x^2} \text{ pour } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

3) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} = 2\,(\text{Arc tg}\,x)' \text{ pour } x \in [0\,,1\,[\\ \dfrac{-2}{1+x^2} = -2\,(\text{Arc tg}\,x)' \text{ pour } x \in]\,1\,,+\infty\,[\,. \end{cases}$

Donc : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2 \text{ Arc tg}\,x + b \text{ pour } x \in [0\,,1\,[\\ f_2(x) = -2 \text{ Arc tg}\,x + c \text{ pour } x \in]\,1\,,+\infty\,[\end{cases}$

Déterminons les constantes réelles b et c.

$\left.\begin{array}{l} \text{On a} : f(0) = f_1(0) \\ \text{Mais} : f(0) = \text{Arc sin } 0 = 0 \\ \text{Et} : f_1(0) = 2 \text{ Arc tg } 0 + b = b \end{array}\right\} \Rightarrow b = 0\,.$

De même : choisissons une valeur particulière $\in\,]\,1\,,+\infty\,[$ pour déterminer c.
On choisit par exemple $\sqrt{3}$.

$\left.\begin{array}{l} \text{On a} : f(\sqrt{3}) = f_2(\sqrt{3}) \\ \text{Mais} : f(\sqrt{3}) = \text{Arc sin } \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3} \\ \text{Et} : f_2(\sqrt{3}) = -2 \text{ Arc tg } \sqrt{3} + c = -2\,\dfrac{\pi}{3} + c \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3} + c \Rightarrow c = \pi\,.$

Par suite : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2 \text{ Arc tg}\,x \text{ pour } x \in [0\,,1\,[\\ f_2(x) = -2 \text{ Arc tg}\,x + \pi \text{ pour } x \in]\,1\,,+\infty\,[\,. \end{cases}$

4) $1 \in D_f$. En plus on a :

$\left.\begin{array}{l} f(1) = \text{Arc sin } 1 = \dfrac{\pi}{2} \\ f_1(1) = 2 \text{ Arc tg } 1 = 2\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \\ f_2(1) = -2 \text{ Arc tg } 1 + \pi = -\dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) = f_1(1) = f_2(1).$

Conclusion : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2 \text{ Arc tg}\,x \text{ pour } x \in [0\,,1] \\ f_2(x) = -2 \text{ Arc tg}\,x + \pi \text{ pour } x \in]\,1\,,+\infty\,[\,. \end{cases}$

EXERCICE 16

1) Soit $f(x) = \text{Arc cos } \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$. Montrer que $D_f = [-1\,,1]$

2) Montrer que f est dérivable sur $]-1\,,1\,[$ et calculer $f'(x)$.

3) En déduire que $\forall\, x \in\,]-1\,,1\,[\,, f(x) = \dfrac{1}{2} \text{ Arc cos}\,x$.

4) Peut-on étendre ce résultat à -1 et 1, c'est-à-dire peut-on avoir $f(x) = \dfrac{1}{2} \text{ Arc cos}\,x$ pour $x \in [-1\,,1]$.

Solutions

1) Posons $u(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$; f est définie lorsque : $\begin{cases} u \text{ est définie et} \\ -1 \leqslant u(x) \leqslant 1. \end{cases}$

Or : $D_u = [-1\,,+\infty\,[$. En plus on a : $(\forall\, x \in [-1\,,+\infty\,[)$:

$-1 \leqslant u(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant u(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{1+x}{2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 1 + x \leqslant 2$
$\Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1.$

Mais $[-1\,,1] \subset [-1\,,+\infty\,[$. Donc tout l'intervalle $[-1\,,1]$ convient.
Par suite : $D_f = [-1\,,1]$.

2) f est dérivable sur $]-1\,,1\,[\Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ est dérivable sur }]-1\,,1\,[\\ \text{et } u(]-1\,,1\,[) \subset\,]-1\,,1\,[\,. \end{cases}$

Or : u est dérivable sur $]-1\,,+\infty\,[$ et en particulier sur $]-1\,,1\,[$.

$(\forall\, x \in\,]-1\,,1\,[) : u'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}} > 0$. Donc :

x	-1		1
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	0	$\nearrow$	1

D'où : $u(]-1\,,1\,[) =]\,0\,,1\,[\subset]-1\,,1\,[$.
Par suite : u est dérivable sur $]-1\,,1\,[$.

$(\forall\, x \in\,]-1\,,1\,[) : f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\forall\, x \in\,]-1\,,1\,[) : f'(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{2}(\text{Arc cos}\,x)'$

Donc : $(\forall\, x \in\,]-1\,,1\,[) : f(x) = \dfrac{1}{2} \text{ Arc cos}\,x + c$

Déterminons la constante réelle c.
Choisissons une valeur particulière $\in\,]-1\,,1\,[$, par exemple 0.

On a : $f(0) = \text{Arc cos } \sqrt{\dfrac{1+0}{2}} = \text{Arc cos } \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

Et : $f(0) = \dfrac{1}{2} \text{ Arc cos } 0 + c = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\pi}{2} + c = \dfrac{\pi}{4} + c$

Par suite : $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + c \Leftrightarrow c = 0$.

Donc : $(\forall\, x \in\,]-1\,,1\,[) : f(x) = \dfrac{1}{2} \text{ Arc cos}\,x$.

4) Posons : $g(x) = \dfrac{1}{2} \text{ Arc cos}\,x$. On a : $f(x) = g(x)$ pour $x \in\,]-1\,,1\,[$.

En plus on a : $\left.\begin{cases} g(1) = \dfrac{1}{2} \text{ Arc cos } 1 = 0 \\ f(1) = \text{Arc cos } \sqrt{\dfrac{1+1}{2}} = \text{Arc cos } 1 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow g(1) = f(1)$

De même : $\left.\begin{cases} g(-1) = \dfrac{1}{2} \text{ Arc cos } (-1) = \dfrac{1}{2}\pi = \dfrac{\pi}{2} \\ f(-1) = \text{Arc cos } \sqrt{\dfrac{1-1}{2}} = \text{Arc cos } 0 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow g(-1) = f(-1).$

Conclusion : $(\forall\, x \in [-1\,,1]) : f(x) = g(x) = \dfrac{1}{2} \text{ Arc cos}\,x$.

PARTIE B
Intégrales Logarithmiques

Formule générale :

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \text{Log}\,|u| + c.$$

EXERCICE 17

Calculer les intégrales définies suivantes :

1) $A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot g\, x\, dx$;

2) $B = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{tg}\, x\, dx$;

3) $E = \int_1^e \frac{\text{Log}\,x}{x}\,dx$;

4) $F = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\,\text{Log}\,x}\,dx.$

Solutions

1) $A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = \Big[\text{Log}\,|\sin x|\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \text{Log}\left|\sin\frac{\pi}{4}\right| - \text{Log}\left|\sin\frac{\pi}{6}\right| = \text{Log}\frac{\sqrt{2}}{2} - \text{Log}\frac{1}{2} = \text{Log}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{1}\right)$

$= \text{Log}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\text{Log}\,2$

2) $B = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\Big[\text{Log}\,|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= -\left(\text{Log}\left|\cos\frac{\pi}{3}\right| - \text{Log}\,|\cos 0|\right) = -\left(\text{Log}\frac{1}{2} - \text{Log}\,1\right)$

$= -\left(-\text{Log}\,2 - 0\right) = \text{Log}\,2$

3) $E = \int_1^e \frac{1}{x}\text{Log}\,x\,dx = \int_1^e (\text{Log}\,x)'\,\text{Log}\,x\,dx = \left[\frac{(\text{Log}\,x)^2}{2}\right]_1^e$

$= \frac{(\text{Log}\,e)^2}{2} - \frac{(\text{Log}\,1)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$

4) $F = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\text{Log}\,x}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{(\text{Log}\,x)'}{\text{Log}\,x}\,dx = \Big[\text{Log}\,|\text{Log}\,x|\Big]_e^{e^2}$

$= \text{Log}\,|\text{Log}\,e^2| - \text{Log}\,|\text{Log}\,e| = \text{Log}\,2 - \text{Log}\,1 = \text{Log}\,2.$

EXERCICE 18

Calculer les intégrales indéfinies suivantes (avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) :

1) $A = \int \frac{1}{x\,(b + \text{Log}\,x)}\,dx$

2) $B = \int \frac{1}{x\,(b - \text{Log}\,x)}\,dx$

3) $E = \int \text{tg}\frac{x}{a}\,dx$

4) $F = \int \cot g\,(ax)\,dx$

5) $H = \int \frac{\sin x}{a + \cos x}\,dx$

Solutions

1) $A = \int \frac{\frac{1}{x}}{b + \text{Log}\,x}\,dx = \int \frac{(b + \text{Log}\,x)'}{b + \text{Log}\,x}\,dx = \text{Log}\,|b + \text{Log}\,x| + c$

2) $B = \int \frac{\frac{1}{x}}{b - \text{Log}\,x}\,dx = -\int \frac{(b - \text{Log}\,x)'}{b - \text{Log}\,x}\,dx = -\text{Log}\,|b - \text{Log}\,x| + c$

3) $E = \int \frac{\sin\frac{x}{a}}{\cos\frac{x}{a}}\,dx = -a\int \frac{\left(\cos\frac{x}{a}\right)'}{\cos\frac{x}{a}}\,dx = -a\,\text{Log}\left|\cos\frac{x}{a}\right| + c$

4) $F = \int \frac{\cos ax}{\sin ax}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{(\sin ax)'}{\sin ax}\,dx = \frac{1}{a}\text{Log}\,|\sin ax| + c$

5) $H = \int \frac{\sin x}{a + \cos x}\,dx = -\int \frac{(a + \cos x)'}{a + \cos x}\,dx = -\text{Log}\,|a + \cos x| + c.$

EXERCICE 19

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

1) $A = \int \frac{\cos(\text{Log}\,x)}{x}\,dx$

2) $B = \int \frac{1 + \text{tg}^2(\text{Log}\,x)}{x}\,dx$

3) $E = \int \frac{1}{x\,(1 + \mathrm{Log}^2 x)}\,dx$

4) $F = \int \frac{1}{x\,\sqrt{1 - \mathrm{Log}^2 x}}\,dx$

Solutions

1) $A = \int (\mathrm{Log}\, x)' \cos(\mathrm{Log}\, x)\,dx = \sin(\mathrm{Log}\, x) + c$

2) $B = \int (\mathrm{Log}\, x)'\,[1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{Log}\, x)]\,dx = \mathrm{tg}(\mathrm{Log}\, x) + c$

3) $E = \int \frac{(\mathrm{Log}\, x)'}{1 + \mathrm{Log}^2 x}\,dx = \mathrm{Arc\,tg}(\mathrm{Log}\, x) + c.$

4) $F = \int \frac{(\mathrm{Log}\, x)'}{\sqrt{1 - \mathrm{Log}^2 x}}\,dx = \mathrm{Arc\,sin}(\mathrm{Log}\, x) + c.$

EXERCICE 20

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

1) $A = \int \frac{x + 5}{x + 3}\,dx$

2) $B = \int \frac{x^2 + 5x - 3}{x + 3}\,dx$

3) $E = \int \frac{x^4 + 7x^2 - 2x - 5}{x^2 + x}\,dx$

Solutions

1) $A = \int \frac{x + 3 + 2}{x + 3}\,dx = \int \left(1 + \frac{2}{x + 3}\right) dx = x + 2\,\mathrm{Log}\,|x + 3| + c.$

2) Par division euclidienne on obtient :

$$\frac{x^2 + 5x - 3}{x + 3} = x + 2 - \frac{9}{x + 3}. \text{ Donc :}$$

$$B = \int \left(x + 2 - \frac{9}{x + 3}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x - 9\,\mathrm{Log}\,|x + 3| + c.$$

3) Par division euclidienne on obtient :

$$\frac{x^4 + 7x^2 - 2x - 5}{x^2 + x} = x^2 - x + 8 - \frac{5\,(2x + 1)}{x^2 + x}. \text{ Donc :}$$

$$E = \int \left(x^2 - x + 8 - \frac{5\,(2x + 1)}{x^2 + x}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 8x - 5\,\mathrm{Log}\,|x^2 + x| + c.$$

EXERCICE 21

1) Démontrer qu'il existe 3 nombres réels a, b, c tels que l'on ait :

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}),\ \frac{1}{x\,(1 - x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1 - x} + \frac{c}{1 + x}.$$

2) Calculer $A = \int \frac{1}{x\,(1 - x^2)}\,dx.$

Solutions

1)
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{1 - x} + \frac{c}{1 + x} = \frac{a\,(1 - x^2) + bx\,(1 + x) + cx\,(1 - x)}{x\,(1 - x^2)}$$
$$= \frac{a - ax^2 + bx + bx^2 + cx - cx^2}{x\,(1 - x^2)}$$
$$= \frac{(b - a - c)\,x^2 + (b + c)\,x + a}{x\,(1 - x^2)}$$

On a donc les équivalences suivantes :

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}) : \frac{1}{x\,(1 - x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1 - x} + \frac{c}{1 + x}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}) : 1 = (b - a - c)\,x^2 + (b + c)\,x + a.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + c = 0 \\ b - a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + c = 0 \\ b - c = a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + c = 0 \\ 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc : $\frac{1}{x\,(1 - x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - x} - \frac{\frac{1}{2}}{1 + x}$

2) Par suite : $A = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + x}\right) dx$

$$= \mathrm{Log}\,|x| - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,|1 - x| - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,|1 + x| + c$$

EXERCICE 22

Calculer : 1) $A = \int (3x^2 + 2x)\,\mathrm{Log}\,(x + 3)\,dx$

2) $B = \int (x^2 - x - a)\,(\mathrm{Log}\, x - b)\,dx$

3) $E = \int (x - a)\,(\mathrm{Log}\, x - b)^2\,dx$

4) $F = \int x^4\,\mathrm{Arc\,tg}\, x\,dx$

Solutions

On utilise une intégration par parties.

1) Posons : $\begin{cases} u' = 3x^2 + 2x \\ v = \text{Log}\,(x+3) \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = x^3 + x^2 \\ v' = \dfrac{1}{x+3} \end{cases}$

On a donc :

$$A = (x^3 + x^2)\,\text{Log}\,(x+3) - \int \frac{x^3 + x^2}{x+3}\,dx$$
$$= (x^3 + x^2)\,\text{Log}\,(x+3) - \int \left(x^2 - 2x + 6 - \frac{18}{x+3}\right) dx$$
$$= (x^3 + x^2)\,\text{Log}\,(x+3) - \frac{x^3}{3} + x^2 - 6x + 18\,\text{Log}\,(x+3) + c$$

2) Posons : $\begin{cases} u' = x^2 - x - a \\ v = \text{Log}\,x - b \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - ax \\ v' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

On a donc :

$$B = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - ax\right)(\text{Log}\,x - b) - \int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - a\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - ax\right)(\text{Log}\,x - b) - \frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{4} + ax + c$$

3) Posons : $\begin{cases} u' = x - a \\ v = (\text{Log}\,x - b)^2 \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = \dfrac{x^2}{2} - ax \\ v' = 2\,(\text{Log}\,x - b)\,\dfrac{1}{x} \end{cases}$

On a donc :

$$E = \left(\frac{x^2}{2} - ax\right)(\text{Log}\,x - b) - 2\int \left(\frac{x}{2} - a\right)(\text{Log}\,x - b)\,dx.$$

On utilise encore une 2[e] intégration par parties pour calculer l'intégrale $\int \left(\frac{x}{2} - a\right)(\text{Log}\,x - b)\,dx$. En effet :

Posons : $\begin{cases} u' = \dfrac{x}{2} - a \\ v = \text{Log}\,x - b \end{cases}$; d'ou : $\begin{cases} u = \dfrac{x^2}{4} - ax \\ v' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Donc :

$$\int \left(\frac{x}{2} - a\right)(\text{Log}\,x - b)\,dx = \left(\frac{x^2}{4} - ax\right)(\text{Log}\,x - b) - \int \left(\frac{x}{4} - a\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^2}{4} - ax\right)(\text{Log}\,x - b) - \frac{x^2}{8} + ax + c$$

Par suite :

$$E = \left(\frac{x^2}{2} - ax\right)(\text{Log}\,x - b) - \left(\frac{x^2}{2} - 2ax\right)(\text{Log}\,x - b) + \frac{x^2}{4} - 2ax + c$$

4) Posons : $\begin{cases} u' = x^4 \\ v = \text{Arc tg}\,x \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = \dfrac{x^5}{5} \\ v' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$

On a donc :

$$F = \frac{x^5}{5}\,\text{Arc tg}\,x - \frac{1}{5}\int \frac{x^5}{1+x^2}\,dx$$
$$= \frac{x^5}{5}\,\text{Arc tg}\,x - \frac{1}{5}\int \left(x^3 - x + \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$
$$= \frac{x^5}{5}\,\text{Arc tg}\,x - \frac{1}{5}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\,\text{Log}\,(1+x^2)\right] + c\,.$$

EXERCICE 23

1) Calculer $(2x + \sqrt{4x^2 - 9})'$

2) En déduire $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{x+4}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx$; $\displaystyle\int \text{Arc sin}\,\frac{3}{2x}\,dx$ pour $x > \frac{3}{2}$

3) En déduire enfin : $A = \displaystyle\int \sqrt{4x^2-9}\,dx.$

Solutions

1) $(2x + \sqrt{4x^2 - 9})' = 2 + \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-9}} = 2\,\dfrac{2x + \sqrt{4x^2-9}}{\sqrt{4x^2-9}}$

2) D'après 1) on a : $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-9}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(2x + \sqrt{4x^2-9})'}{2x + \sqrt{4x^2-9}}$

Donc : $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x + \sqrt{4x^2-9})'}{2x + \sqrt{4x^2-9}}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{Log}\,|2x + \sqrt{4x^2-9}| + c$

De même :

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx + \int \frac{4}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{(4x^2-9)'}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2-9} + 2\,\text{Log}\,|2x + \sqrt{4x^2-9}| + c$$

Enfin, calculons $\displaystyle\int \text{Arc sin}\,\frac{3}{2x}\,dx$ par une intégration par parties.

Posons : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \text{Arc sin}\,\dfrac{3}{2x} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = x \\ v' = \dfrac{-\dfrac{3}{2}\,\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{9}{4x^2}}} \end{cases}$

On a donc :

$$\int \text{Arc sin}\frac{3}{2x}\,dx = x\,\text{Arc sin}\frac{3}{2x} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x\sqrt{1-\frac{9}{4x^2}}}\,dx$$

$$= x\,\text{Arc sin}\frac{3}{2x} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x\sqrt{\frac{4x^2-9}{4x^2}}}\,dx$$

$$= x\,\text{Arc sin}\frac{3}{2x} + 3\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx \quad \left(\text{car } x > \frac{3}{2}\right).$$

$$= x\,\text{Arc sin}\frac{3}{2x} + \frac{3}{2}\,\text{Log}\,|2x + \sqrt{4x^2-9}\,| + c.$$

3) Posons : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \sqrt{4x^2-9} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u = x \\ v' = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-9}} \end{cases}$

On a donc :

$$A = x\sqrt{4x^2-9} - \int \frac{4x^2}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx$$

$$= x\sqrt{4x^2-9} - \int \frac{4x^2-9+9}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx$$

$$= x\sqrt{4x^2-9} - \int \frac{4x^2-9}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx - 9\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx$$

$$= x\sqrt{4x^2-9} - \int \sqrt{4x^2-9}\,dx - 9\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx$$

$$= x\sqrt{4x^2-9} - A - \frac{9}{2}\,\text{Log}\,|2x + \sqrt{4x^2-9}\,| + c$$

Par suite :

$$2\,A = x\sqrt{4x^2-9} - \frac{9}{2}\,\text{Log}\,|2x + \sqrt{4x^2-9}\,| + c$$

Enfin : $A = \dfrac{1}{2}x\sqrt{4x^2-9} - \dfrac{9}{4}\,\text{Log}\,|2x + \sqrt{4x^2-9}\,| + c$

PARTIE C
INTEGRALES DES FONCTIONS EXPONENTIELLES

Formule générale : $\int u'e^u\,dx = e^u + c$

EXERCICE 24

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$\int e^{\alpha x}\,dx$; $\int e^{-2x+5}\,dx$; $\int xe^{\alpha x^2}\,dx$; $\int xe^{-2x^2+5}\,dx$;

$\int x^n e^{\alpha x^{n+1}}\,dx$; $\int \sin(\alpha x)e^{\cos(\alpha x)}\,dx$; $\int \dfrac{e^{\frac{1}{x^n}}}{x^{n+1}}\,dx.$

Solutions

1) $\int e^{\alpha x}\,dx = \dfrac{1}{\alpha}\int (\alpha x)'\,e^{\alpha x}\,dx = \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c$

2) $\int e^{-2x+5}\,dx = -\dfrac{1}{2}\int (-2x+5)'\,e^{-2x+5}\,dx = -\dfrac{1}{2}e^{-2x+5} + c$

3) $\int xe^{\alpha x^2}\,dx = \dfrac{1}{2\alpha}\int (\alpha x^2)'\,e^{\alpha x^2}\,dx = \dfrac{1}{2\alpha}e^{\alpha x^2} + c$

4) $\int xe^{-2x^2+5}\,dx = -\dfrac{1}{4}\int (-2x^2+5)'\,e^{-2x^2+5}\,dx = -\dfrac{1}{4}e^{-2x^2+5} + c$

5) $\int x^n e^{\alpha x^{n+1}}\,dx = \dfrac{1}{\alpha(n+1)}\int (\alpha x^{n+1})'\,e^{\alpha x^{n+1}}\,dx = \dfrac{1}{\alpha(n+1)}e^{\alpha x^{n+1}} + c$

6) $\int \sin(\alpha x)\,e^{\cos(\alpha x)}\,dx = -\dfrac{1}{\alpha}\int (\cos(\alpha x))'\,e^{\cos(\alpha x)}\,dx = -\dfrac{1}{\alpha}e^{\cos(\alpha x)} + c$

7) $\int \dfrac{e^{\frac{1}{x^n}}}{x^{n+1}}\,dx = \int \dfrac{1}{x^{n+1}}\,e^{\frac{1}{x^n}}\,dx = -\dfrac{1}{n}\int \left(\dfrac{1}{x^n}\right)'\,e^{\frac{1}{x^n}}\,dx = -\dfrac{1}{n}e^{\frac{1}{x^n}} + c$

EXERCICE 25

Calculer par parties : $\int x^5 e^{\alpha x^3}\,dx$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

(poser $u = x^3$ et $v' = x^2 e^{\alpha x^3}$).

Solution

$\begin{cases} u = x^3 \\ v' = x^2 e^{\alpha x^3} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u' = 3x^2 \\ v = \int x^2 e^{\alpha x^3}\,dx = \dfrac{1}{3\alpha}e^{\alpha x^3} \end{cases}$

Donc : $\int x^5 e^{\alpha x^3}\,dx = \dfrac{x^3}{3\alpha}e^{\alpha x^3} - \dfrac{1}{\alpha}\int x^2 e^{\alpha x^3}\,dx$

$$= \frac{x^3}{3\alpha}e^{\alpha x^3} - \frac{1}{3\alpha^2}e^{\alpha x^3} + c.$$

EXERCICE 26

Calculer $\int x^2 e^{\alpha x}\,dx$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (2 fois par parties).

Solutions

Posons : $\begin{cases} u = x^2 \\ v' = e^{\alpha x} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u' = 2x \\ v = \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x} \end{cases}$

Donc : $\int x^2 e^{\alpha x}\,dx = \dfrac{x^2}{\alpha}e^{\alpha x} - \dfrac{2}{\alpha}\int xe^{\alpha x}\,dx.$

Posons : $\begin{cases} u = x \\ v' = e^{\alpha x} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x} \end{cases}$

Donc : $\int xe^{\alpha x}\,dx = \frac{x}{\alpha}e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,dx$

$= \frac{x}{\alpha}e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x} + c.$

Par suite :

$$\int x^2 e^{\alpha x}\,dx = \frac{x^2}{\alpha}e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x}\right) + c$$

$$= \frac{x^2}{\alpha}e^{\alpha x} - \frac{2x}{\alpha^2}e^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3}e^{\alpha x} + c$$

$$= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(x^2 - \frac{2x}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right) + c.$$

EXERCICE 27

Calculer : $\int \frac{e^x}{3+e^x}\,dx$; $\int \frac{e^x}{\sqrt{3+e^x}}\,dx$; $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$; $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx.$

Solutions

1) $\int \frac{e^x}{3+e^x}\,dx = \int \frac{(3+e^x)'}{3+e^x}\,dx = \text{Log}\,(3+e^x) + c$

2) $\int \frac{e^x}{3+e^x}\,dx = \int \frac{(3+e^x)'}{\sqrt{3+e^x}}\,dx = 2\sqrt{3+e^x} + c$

3) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{(e^x)'}{1+(e^x)^2}\,dx = \text{Arc tg}\,e^x + c$

4) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx = 2\int \frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}}\,dx = 2\,\text{Arc sin}\left(e^{\frac{x}{2}}\right) + c$

EXERCICE 28

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Calculer $\int \frac{dx}{a+e^{bx}}$

Solution

$$\int \frac{dx}{a+e^{bx}} = \int \frac{dx}{e^{bx}(ae^{-bx}+1)} = \int \frac{e^{-bx}}{ae^{-bx}+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{ab}\int \frac{(ae^{-bx}+1)'}{ae^{-bx}+1}\,dx = -\frac{1}{ab}\text{Log}\,|ae^{-bx}+1| + c$$

EXERCICE 29

Calculer $A = \int \cos^2 x\, e^{-x}\,dx$ (3 fois par parties).

Solutions

Posons : $\begin{cases} u = \cos^2 x \\ v' = e^{-x} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

Donc : $A = -\cos^2 x\, e^{-x} - \int \sin 2x\, e^{-x}\,dx.$

Posons : $\begin{cases} u = \sin 2x \\ v' = e^{-x} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u' = 2\cos 2x \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

Donc : $\int \sin 2x\, e^{-x}\,dx = -\sin 2x\, e^{-x} + 2\int \cos 2x\, e^{-x}\,dx.$

Posons : $\begin{cases} u = \cos 2x \\ v' = e^{-x} \end{cases}$; d'où : $\begin{cases} u' = -2\sin 2x \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

Donc : $\int \cos 2x\, e^{-x}\,dx = -\cos 2x\, e^{-x} - 2\int \sin 2x\, e^{-x}\,dx$

Par suite :

$$\int \sin 2x\, e^{-x}\,dx = -\sin 2x\, e^{-x} - 2\cos 2x\, e^{-x} - 4\int \sin 2x\, e^{-x}\,dx$$

Ce qui est équivalent à :

$$5\int \sin 2x\, e^{-x}\,dx = -\sin 2x\, e^{-x} - 2\cos 2x\, e^{-x} + c$$

C'est-à-dire encore :

$$\int \sin 2x\, e^{-x}\,dx = \frac{e^{-x}}{5}(-\sin 2x - 2\cos 2x) + c$$

Par conséquent :

$$A = -\cos^2 x\, e^{-x} + \frac{e^{-x}}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x) + c$$

$$= e^{-x}\left[-\cos^2 x + \frac{1}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x)\right] + c$$

CHAPITRE 9

Equations différentielles

RAPPELS

Soit $f'(x)$ = la dérivée 1^{ere} de $f(x)$.
Soit $f''(x)$ = la dérivée seconde de $f(x)$.
Posons : $y = f(x)$; $y' = f'(x)$; $y'' = f''(x)$.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors les solutions de l'équation différentielle : $y' = ay$, sont les fonctions $y = \lambda e^{ax}$ avec λ une constante réelle arbitraire.

2) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors les solutions de l'équation différentielle : $y'' = ay$, sont les fonctions $y = \lambda_1 e^{wx} + \lambda_2 e^{-wx}$ avec $w = \sqrt{a}$ et λ_1 et λ_2 deux constantes réelles arbitraires.

3) Soit $a \in \mathbb{R}_-^*$. Alors les solutions de l'équation différentielle : $y'' = ay$, sont les fonctions $y = \lambda_1 \cos wx + \lambda_2 \sin wx$ avec $w = \sqrt{-a}$ et λ_1 et λ_2 deux constantes réelles arbitraires.

EXERCICE 1

Résoudre les équations différentielles suivantes, et déterminer pour chaque équation la solution particulière qui vérifie $y(2) = 1$:

1) (E) : $6y' - 5 = 0$
2) (F) : $2y' + 5x = 0$
3) (H) : $2y' - 3y = 0$

Solutions

1) (E) $\Leftrightarrow y' = \frac{5}{6} \Leftrightarrow y = \frac{5}{6}x + c$ avec c une constante réelle arbitraire.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $y = \frac{5}{6}x + c$.

Cherchons la solution particulière qui vérifie $y(2) = 1$.

On a : $y(2) = 1 \Leftrightarrow \frac{10}{6} + c = 1 \Leftrightarrow c = -\frac{4}{6}$.

La solution particulière qui vérifie $y(2) = 1$ est donc :

$y_1 = \frac{5}{6}x - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}(5x - 4)$.

2) (F) $\Leftrightarrow y' = -\frac{5}{2}x \Leftrightarrow y = -\frac{5}{4}x^2 + c$ avec c une constante réelle arbitraire.

Les solutions de (F) sont donc les fonctions : $y = -\frac{5}{4}x^2 + c$.

Déterminons la solution particulière qui vérifie $y(2) = 1$.
On a : $y(2) = 1 \Leftrightarrow -5 + c = 1 \Leftrightarrow c = 6$.
Donc la solution particulière qui vérifie $y(2) = 1$ est : $y_1 = -\frac{5}{4}x^2 + 6$

3) (H) $\Leftrightarrow y' = \frac{3}{2}y \Leftrightarrow y = \lambda e^{\frac{3}{2}x}$ avec λ une constante réelle arbitraire.

Donc les solutions de (H) sont les fonctions $y = \lambda e^{\frac{3}{2}x}$

Cherchons la solution particulière qui vérifie $y(2) = 1$.

On a : $y(2) = 1 \Leftrightarrow \lambda e^3 = 1 \Leftrightarrow \lambda = e^{-3}$.

Donc la solution particulière qui vérifie $y(2) = 1$ est :

$y_1 = e^{-3} e^{\frac{3}{2}x} = e^{\frac{3}{2}x - 3} = e^{3\left(\frac{x}{2} - 1\right)}$

EXERCICE 2

Résoudre les équations différentielles suivantes, et déterminer pour chaque équation la solution particulière qui vérifie : $y(0) = 3$ et $y'(5) = -1$:

1) (E) : $5y'' - 4 = 0$; 2) (F) : $5y'' + 4x = 0$

Solutions

1) (E) $\Leftrightarrow y'' = \frac{4}{5} \Leftrightarrow y' = \frac{4}{5}x + a \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x^2 + ax + b$ avec a et b deux constantes réelles arbitraires. Donc les solutions de (E) sont les fonctions $y = \frac{2}{5}x^2 + ax + b$

Cherchons la solution particulière qui vérifie $y(0) = 3$ et $y'(5) = -1$.

On a : $y(0) = 3 \Leftrightarrow b = 3$

Et : $y'(5) = -1 \Leftrightarrow 4 + a = -1 \Leftrightarrow a = -5$

Donc la solution particulière cherchée est $y_1 = \frac{2}{5}x^2 - 5x + 3$

2) (F) $\Leftrightarrow y'' = -\frac{4}{5}x \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{5}x^2 + a \Leftrightarrow y = -\frac{2}{15}x^3 + ax + b$ avec a et b deux constantes réelles arbitraires. Donc les solutions de (F) sont les fonctions

$y = -\frac{2}{15}x^3 + ax + b$.

Cherchons la solution particulière qui vérifie $y(0) = 3$ et $y'(5) = -1$.

On a : $y(0) = 3 \Leftrightarrow b = 3$.

Et : $y'(5) = -1 \Leftrightarrow -10 + a = -1 \Leftrightarrow a = 9$.

Donc la solution particulière cherchée est $y_1 = -\frac{2}{15}x^3 + 9x + 3$.

EXERCICE 3

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' + 3y = 0$.

2) Déterminer la solution particulière de (E) qui vérifie : $y(0) = \sqrt{3}$ et $y'\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) = 0$.

Solutions

1) (E) $\Leftrightarrow y'' = -\frac{3}{4}y \Leftrightarrow y = \lambda_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \lambda_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ avec λ_1 et λ_2 deux constantes réelles arbitraires.

Donc : les solutions de (E) sont les fonctions $y = \lambda_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \lambda_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

2) $y(0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \lambda_1 = \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \lambda_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

$$\Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \lambda_2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Donc : $y'\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{6} + \lambda_2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{6} = 0$.

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\frac{1}{2} + \lambda_2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} + \lambda_2\frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 1$$

Conclusion : la solution particulière cherchée est :

$y_1 = \sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

EXERCICE 4

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' - 5y = 0$.

2) Déterminer la solution particulière de (E) qui vérifie : $y(0) = 4$ et $y'(0) = \sqrt{5}$.

Solutions

1) (E) $\Leftrightarrow y'' = \frac{5}{4}y \Leftrightarrow y = \lambda_1 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} + \lambda_2 e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x}$ avec λ_1 et λ_2 deux constantes réelles arbitraires.

Donc : les solutions de (E) sont les fonctions $y = \lambda_1 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} + \lambda_2 e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x}$

2) $y' = \lambda_1\frac{\sqrt{5}}{2}e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} - \lambda_2\frac{\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x}$

Donc : $y(0) = 4 \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 4$

Et : $y'(0) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 2$.

Par suite : $\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = 4\\ \lambda_1 - \lambda_2 = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\lambda_1 = 6 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3\\ \lambda_2 = 4 - \lambda_1 = 4 - 3 = 1.\end{cases}$

La solution particulière cherchée est donc : $y = 3e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} + e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x}$

EXERCICE 5

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 5y = 10x - 3$.

1) Démontrer que cette équation admet une solution particulière de la forme $y_1 = ax + b$.

2) En déduire toutes les solutions de (E) (poser $y = y_1 + z$ avec z une autre fonction de la variable réelle x).

Solutions

1) $y_1 = ax + b$ est une solution de (E) $\Leftrightarrow y_1' + 5y_1 = 10x - 3$.

Or : $y_1' + 5y_1 = 10x - 3 \Leftrightarrow a + 5ax + 5b = 10x - 3$
$\Leftrightarrow 5ax + a + 5b = 10x - 3$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 10 \Leftrightarrow a = 2 \\ a + 5b = -3 \Leftrightarrow 5b = -3 - a = -5 \Leftrightarrow b = -1 \end{cases}$

D'où : $y_1 = 2x - 1$.

2) $y = y_1 + z$ est une solution de (E) $\Leftrightarrow (y_1' + z') + 5(y_1 + z) = 10x - 3$
$\Leftrightarrow 2 + z' + 10x - 5 + 5z = 10x - 3$
$\Leftrightarrow z' + 5z = 0 \Leftrightarrow z' = -5z$
$\Leftrightarrow z = \lambda e^{-5x}$ avec λ une constante réelle arbitraire.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions $y = y_1 + z = 2x - 1 + \lambda e^{-5x}$.

EXERCICE 6

Soit l'équation différentielle (E) : $9y'' + 4y = 4x^2 + 8x + 2$.

1) Démontrer que cette équation admet une solution particulière de la forme $y_1 = ax^2 + bx + c$.

2) En déduire toutes les solutions de (E) (poser $y = y_1 + z$ avec z une autre fonction de la variable réelle x).

Solutions

1) $y_1 = ax^2 + bx + c$ est une solution de (E) $\Leftrightarrow 9y_1'' + 4y_1 = 4x^2 + 8x + 2$.

Or : $y_1' = 2ax + b \Leftrightarrow y_1'' = 2a$.

Donc : $9y_1'' + 4y_1 = 4x^2 + 8x + 2 \Leftrightarrow 18a + 4ax^2 + 4bx + 4c = 4x^2 + 8x + 2$
$\Leftrightarrow 4ax^2 + 4bx + 4c + 18a = 4x^2 + 8x + 2$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1 \\ 4b = 8 \Leftrightarrow b = 2 \\ 4c + 18a = 2 \Leftrightarrow 4c = 2 - 18 = -16 \Leftrightarrow c = -4 \end{cases}$

D'où : $y_1 = x^2 + 2x - 4$

2) $y = y_1 + z$ est une solution de (E)
$\Leftrightarrow 9(y_1'' + z'') + 4(y_1 + z) = 4x^2 + 8x + 2$
$\Leftrightarrow 9(2 + z'') + 4(x^2 + 2x - 4 + z) = 4x^2 + 8x + 2$
$\Leftrightarrow 18 + 9z'' + 4x^2 + 8x - 16 + 4z = 4x^2 + 8x + 2$
$\Leftrightarrow 9z'' + 4z = 0 \Leftrightarrow z'' = -\frac{4}{9}z$.
$\Leftrightarrow z = \lambda_1 \cos\frac{2}{3}x + \lambda_2 \sin\frac{2}{3}x$

avec λ_1 et λ_2 deux constantes réelles arbitraires.

Donc : les solutions de (E) sont les fonctions :

$y = y_1 + z = x^2 + 2x - 4 + \lambda_1 \cos\frac{2}{3}x + \lambda_2 \sin\frac{2}{3}x$.

avec λ_1 et λ_2 deux constantes réelles arbitraires.

EXERCICE 7

Soit l'équation différentielle (E) : $25y'' - 4y = -4x^2 + 4x + 6$.

1) Démontrer que cette équation admet une solution particulière de la forme $y_1 = ax^2 + bx + c$.

2) En déduire toutes les solutions de (E) (poser $y = y_1 + z$ avec z une autre fonction de la variable réelle x).

Solutions

1) $y_1 = ax^2 + bx + c$ est une solution de (E) $\Leftrightarrow 25y_1'' - 4y_1 = -4x^2 + 4x + 6$

Or : $y_1' = 2ax + b \Leftrightarrow y_1'' = 2a$.

Donc : $25y_1'' - 4y_1 = -4x^2 + 4x + 6$
$\Leftrightarrow 50a - 4ax^2 - 4bx - 4c = -4x^2 + 4x + 6$
$\Leftrightarrow -4ax^2 - 4bx - 4c + 50a = -4x^2 + 4x + 6$
$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a = -4 \Leftrightarrow a = 1 \\ -4b = 4 \Leftrightarrow b = -1 \\ -4c + 50a = 6 \Leftrightarrow -4c = 6 - 50 \Leftrightarrow c = 11 \end{cases}$

D'où : $y_1 = x^2 - x + 11$

2) $y = y_1 + z$ est une solution de (E) :
$\Leftrightarrow 25(y_1'' + z'') - 4(y_1 + z) = -4x^2 + 4x + 6$
$\Leftrightarrow 25(2 + z'') - 4(x^2 - x + 11 + z) = -4x^2 + 4x + 6$
$\Leftrightarrow 50 + 25z'' - 4x^2 + 4x - 44 - 4z = -4x^2 + 4x + 6$
$\Leftrightarrow 25z'' - 4z = 0 \Leftrightarrow z'' = \frac{4}{25}z$
$\Leftrightarrow z = \lambda_1 e^{\frac{2}{5}x} + \lambda_2 e^{-\frac{2}{5}x}$

avec λ_1 et λ_2 deux constantes réelles arbitraires.

Donc : les solutions de (E) sont les fonctions :

$y = y_1 + z = x^2 - x + 11 + \lambda_1 e^{\frac{2}{5}x} + \lambda_2 e^{-\frac{2}{5}x}$

EXERCICE 8

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Résoudre l'équation (E) en posant $y = e^{-2x}z$ avec z une autre fonction de la variable réelle x.

Solution

$y = e^{-2x}z \Leftrightarrow y' = -2e^{-2x}z + e^{-2x}z'$
$\Leftrightarrow y'' = 4e^{-2x}z - 2e^{-2x}z' - 2e^{-2x}z' + e^{-2x}z''$
$= 4e^{-2x}z - 4e^{-2x}z' + e^{-2x}z''$

D'où : (E) $\Leftrightarrow 4e^{-2x}z - 4e^{-2x}z' + e^{-2x}z'' - 8e^{-2x}z + 4e^{-2x}z' + 13e^{-2x}z = 0$
$\Leftrightarrow e^{-2x}z'' + 9e^{-2x}z = 0 \Leftrightarrow e^{-2x}(z'' + 9z) = 0$
$\Leftrightarrow z'' + 9z = 0 \Leftrightarrow z'' = -9z$
$\Leftrightarrow z = \lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x$

avec λ_1 et λ_2 deux constantes réelles arbitraires.

Donc : les solutions de (E) sont les fonctions :

$y = e^{-2x}z = e^{-2x}(\lambda_1 \cos 3x + \lambda_2 \sin 3x)$.

EXERCICE 9

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 2(x-1)e^{-x}$

1) Montrer que $y_1 = x e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

2) En déduire toutes les solutions de (E) (poser $y = y_1 + z$ avec z une autre fonction de la variable réelle x).

Solutions

1) $y_1 = x e^{-x}$ est une solution de (E) $\Leftrightarrow y_1'' + y_1 = 2(x-1)e^{-x}$.

Or : $y_1' = e^{-x} - x e^{-x} \Leftrightarrow y_1'' = -e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} = -2e^{-x} + x e^{-x}$.

D'où : $y_1'' + y_1 = -2e^{-x} + xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(2x-2) = 2(x-1)e^{-x}$

Par suite : $y_1 = xe^{-x}$ est une solution de (E).

2) $y = y_1 + z$ est une solution de (E) $\Leftrightarrow y_1'' + z'' + y_1 + z = 2(x-1)e^{-x}$

$\Leftrightarrow -2e^{-x} + xe^{-x} + z'' + xe^{-x} + z = 2(x-1)e^{-x}$

$\Leftrightarrow z'' + z = 0 \Leftrightarrow z'' = -z$

$\Leftrightarrow z = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x$

avec λ_1 et λ_2 deux constantes réelles arbitraires.

Par suite : les solutions de (E) sont les fonctions :

$y = y_1 + z = xe^{-x} + \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x$.

Méthode générale pour résoudre l'équation différentielle
$y'' + py' + qy = 0$

RAPPELS

1) Considérons l'équation différentielle (E) : $y'' + py' + qy = 0$ avec $p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$. On appelle équation caractéristique de (E), l'équation (A) : $r^2 + pr + q = 0$ avec $r \in \mathbb{C}$. Soit Δ le discriminant de (A). Pour résoudre (E) on cherche d'abord les solutions de (A) dans $\mathbb{C}$:

— Si (A) admet 2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2 ($\Delta > 0$) alors les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ avec c_1 et c_2 des constantes réelles arbitraires.

— Si (A) admet 2 solutions réelles égales $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ ($\Delta = 0$) alors les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y = e^{-\frac{p}{2}x}(c_1 x + c_2)$ avec c_1 et c_2 des constantes réelles arbitraires.

— Si (A) admet 2 solutions complexes ($\Delta < 0$) : $r_1 = a + ib$ et $r_2 = a - ib$ alors les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$ avec c_1 et c_2 des constantes réelles arbitraires.

Dans les 3 cas, les solutions trouvées de (E) sont appelées des solutions générales de (E) et sont définies sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$).

2) Pour résoudre l'équation (F) : $y'' + py' + qy = h(x)$, on cherche une solution particulière $f_1(x)$ de (F), et la solution générale $f_2(x)$ de l'équation (E) : $y'' + py' + qy = 0$, et ensuite les solutions de (F) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y = f_1(x) + f_2(x)$.

EXERCICE 10

Considérons l'équation différentielle (F) : $y'' - 6y' + 8y = 2e^{3x}(2 - x^2)$

1) Montrer que (F) admet une solution particulière de la forme : $y = \lambda x^2 e^{3x}$.

2) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle : (E) : $y'' - 6y' + 8y = 0$.

3) En déduire toutes les solutions de (F).

Solutions

1) $y = \lambda x^2 e^{3x} \Rightarrow y' = \lambda 2xe^{3x} + \lambda 3x^2 e^{3x}$

$\Rightarrow y'' = \lambda 2e^{3x} + \lambda 6xe^{3x} + \lambda 6xe^{3x} + \lambda 9x^2 e^{3x}$

Donc : (F) $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : \lambda 2e^{3x} + \lambda 12xe^{3x} + \lambda 9x^2e^{3x} - \lambda 12xe^{3x} - \lambda 18x^2e^{3x} + \lambda 8x^2e^{3x} = 2e^{3x}(2 - x^2)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : \lambda 2e^{3x} - \lambda x^2 e^{3x} = 2e^{3x}(2 - x^2)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : \lambda e^{3x}(2 - x^2) = 2e^{3x}(2 - x^2) \Leftrightarrow \lambda = 2$

D'où : l'équation (F) admet une solution particulière $f_1(x) = 2x^2 e^{3x}$

2) L'équation caractéristique de (E) est l'équation (A) : $r^2 - 6r + 8 = 0$. $\Delta' = 9 - 8 = 1$. Donc : (A) admet 2 solutions réelles distinctes : $r_1 = 4$ et $r_2 = 2$. Par suite : la solution générale de (E) est $f_2(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}$ avec c_1 et c_2 des constantes réelles arbitraires.

3) Les solutions de (F) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x} + 2x^2 e^{3x}$
$= e^{2x}(c_1 e^{2x} + 2e^{x} + c_2)$.

EXERCICE 11

Considérons l'équation différentielle (F) : $y'' + 4y' + 4y = -4x^2 + 2$.

1) Montrer que (F) admet une solution particulière de la forme : $y = ax^2 + bx + c$.

2) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$

3) En déduire toutes les solutions de (F).

Solutions

1) $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a$

Donc : (F) $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : 2a + 8ax + 4b + 4ax^2 + 4bx + 4c = -4x^2 + 2$

$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : 4ax^2 + (8a + 4b)x + 2a + 4b + 4c = -4x^2 + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -4 \Leftrightarrow a = -1 \\ 8a + 4b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0 \Leftrightarrow b = -2a = 2 \\ 2a + 4b + 4c = 2 \Leftrightarrow 4c = 2 - 2a - 4b = 2 + 2 - 8 = -4 \\ \qquad \Leftrightarrow c = -1 \end{cases}$$

D'où : (F) admet une solution particulière $f_1(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$

2) L'équation caractéristique de (E) est l'équation (A) : $r^2 + 4r + 4 = 0$
$\Delta' = 4 - 4 = 0$. Donc (A) admet 2 solutions réelles égales : $r_1 = r_2 = -2$.
Par suite : la solution générale de (E) est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f_2(x) = e^{-2x}(c_1x + c_2)$ avec c_1 et c_2 des constantes réelles arbitraires.

3) Les solutions de (F) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = e^{-2x}(c_1x + c_2) - (x-1)^2$.

EXERCICE 12

Considérons l'équation différentielle (F) : $y'' - 4y' + 20y = \cos 2x + \sin 2x$.

1) Montrer que (F) admet une solution particulière de la forme :
$y = a\cos 2x + b\sin 2x$.

2) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle :
(E) : $y'' - 4y' + 20y = 0$

3) En déduire toutes les solutions de (F).

Solutions

1) $y = a\cos 2x + b\sin 2x \Rightarrow y' = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$
$\Rightarrow y'' = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$.

Donc : (F) $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : (16a - 8b)\cos 2x + (16b + 8a)\sin 2x = \cos 2x + \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16a - 8b = 1 \\ 8a + 16b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32a - 16b = 2 \\ 8a + 16b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{40} \\ 16b = 1 - 8a = 1 - \frac{24}{40} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{40} \\ 16b = \frac{16}{40} \Leftrightarrow b = \frac{1}{40}. \end{cases}$$

D'où : (F) admet une solution particulière $f_1(x) = \frac{3}{40}\cos 2x + \frac{1}{40}\sin 2x$.

2) L'équation caractéristique de (E) est l'équation (A) : $r^2 - 4r + 20 = 0$
$\Delta' = 4 - 20 = -16 = (i4)^2$. Donc (A) admet 2 solutions complexes conjuguées :
$r_1 = 2 + 4i$ et $r_2 = 2 - 4i$. Par suite, la solution générale de (E) est
$f_2(x) = e^{2x}(c_1\cos 4x + c_2\sin 4x)$ avec c_1 et c_2 des constantes réelles arbitraires.

3) Les solutions de (F) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = e^{2x}(c_1\cos 4x + c_2\sin 4x) + \frac{3}{40}\cos 2x + \frac{1}{40}\sin 2x.$$

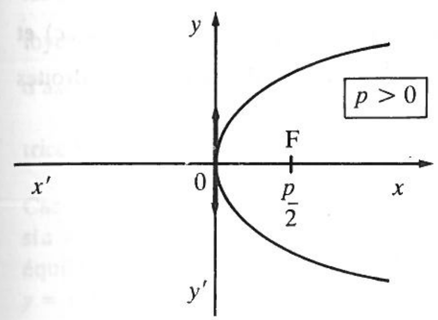
CHAPITRE 10

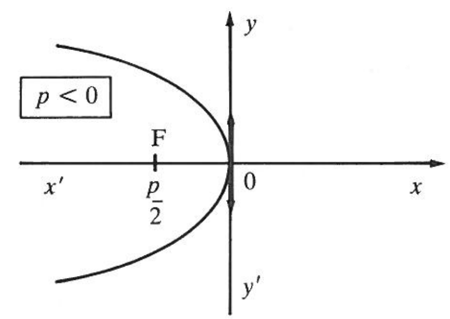
Les coniques

RAPPELS

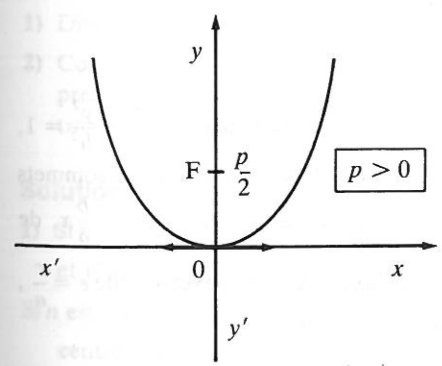
I. Parabole

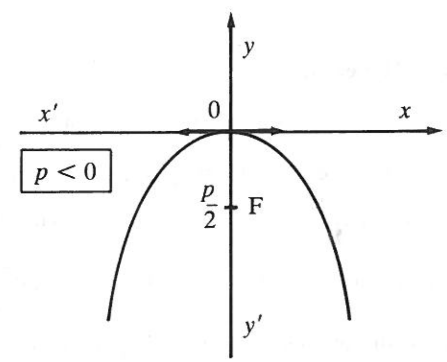
L'ensemble des points M (x, y) du plan vérifiant l'équation réduite (E) : $y^2 = 2px$, avec $p \in \mathbb{R}^*$, est appelé parabole de sommet 0, d'axes $x'x$ et $y'y$, de paramètre p, de foyer F $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, d'axe focal $x'x$, et de directrice la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$.





Remarque : L'ensemble des points M (x, y) du plan vérifiant l'équation réduite (F) : $x^2 = 2py$ est aussi une parabole de sommet 0, d'axes $x'x$ et $y'y$, de paramètre p, de foyer F $\left(0, \frac{p}{2}\right)$, d'axe focal $y'y$, et de directrice la droite d'équation $y = -\frac{p}{2}$.



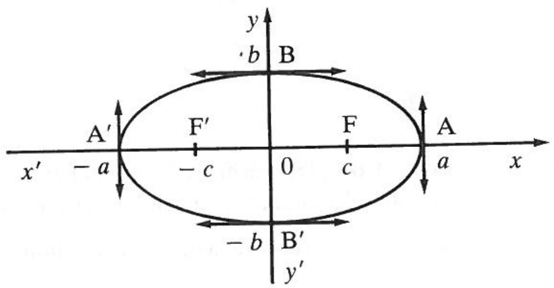


II. Ellipse :

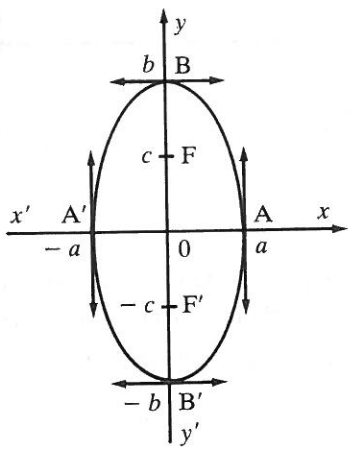
L'ensemble des points M (x, y) du plan vérifiant l'équation réduite (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

avec $a > 0, b > 0$ et $a \neq b$, est appelé ellipse de centre 0, d'axes $x'x$ et $y'y$, de sommets A $(a, 0)$, A' $(-a, 0)$, B $(0, b)$ et B' $(0, -b)$.

— Si $a > b$, on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, et on obtient une ellipse de foyers F $(c, 0)$ et F' $(-c, 0)$, d'axe focal $x'x$, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$, et de directrices les droites d'équations : $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$



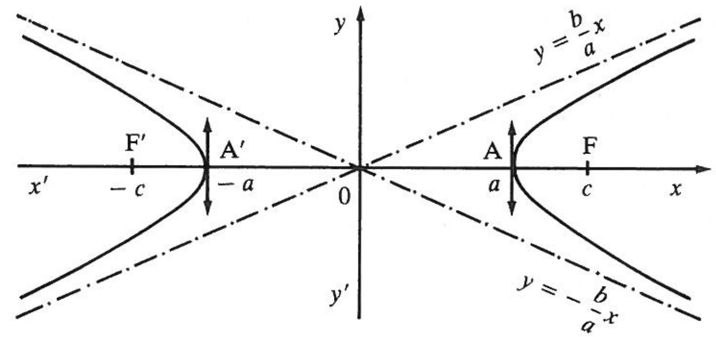
— Si $a < b$, on pose $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, et on obtient une ellipse de foyers F $(0, c)$ et F' $(0, -c)$, d'axe focal $y'y$, d'excentricité $e = \frac{c}{b}$, et de directrices les droites d'équations :
$y = \frac{b^2}{c}$ et $y = -\frac{b^2}{c}$.



III. Hyperbole :

L'ensemble des points M (x, y) du plan vérifiant l'équation réduite (E) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

avec $a > 0$ et $b > 0$, est appelé hyperbole de centre 0, d'axes $x'x$ et $y'y$, de sommets A $(a, 0)$ et A' $(-a, 0)$, d'asymptotes les droites d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$, de foyers F $(c, 0)$ et F' $(-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, d'axe focal $x'x$, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$, et de directrices les droites d'équations $x = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a^2}{c}$.

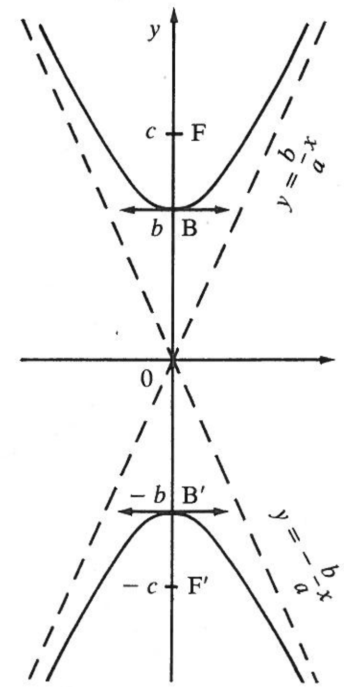


Remarque :

L'ensemble des points M (x, y) du plan vérifiant l'équation réduite :

(F) : $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, avec $a > 0$ et $b > 0$, est aussi une hyperbole de centre 0, d'axes $x'x$ et $y'y$, de sommets B $(0, b)$ et B' $(0, -b)$, d'asymptotes les droites d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$, de foyers F $(0, c)$ et F' $(0, -c)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, d'axe focal $y'y$, d'excentricité $e = \frac{c}{b}$, et de directrice les droites d'équations $y = \frac{b^2}{c}$ et $y = -\frac{b^2}{c}$.

Cas particulier : Dans les 2 équations (E) et (F), si $a = b$, alors l'hyperbole sera appelée hyperbole équilatère d'excentricité $e = \sqrt{2}$ et d'asymptotes $y = x$ et $y = -x$.



EXERCICE 1

Soit (C_n) l'ensemble des points M (x, y) vérifiant l'équation :

(E_n) : $(-1)^n \frac{x^2}{n^2} + y^2 = 1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Discuter, suivant les valeurs de n, la nature de l'ensemble (C_n).

2) Construire dans un même repère orthonormé, les ensembles (C_1) et (C_2) en précisant leurs éléments géométriques : centre, axe focal, sommets, foyers, excentricité et asymptotes.

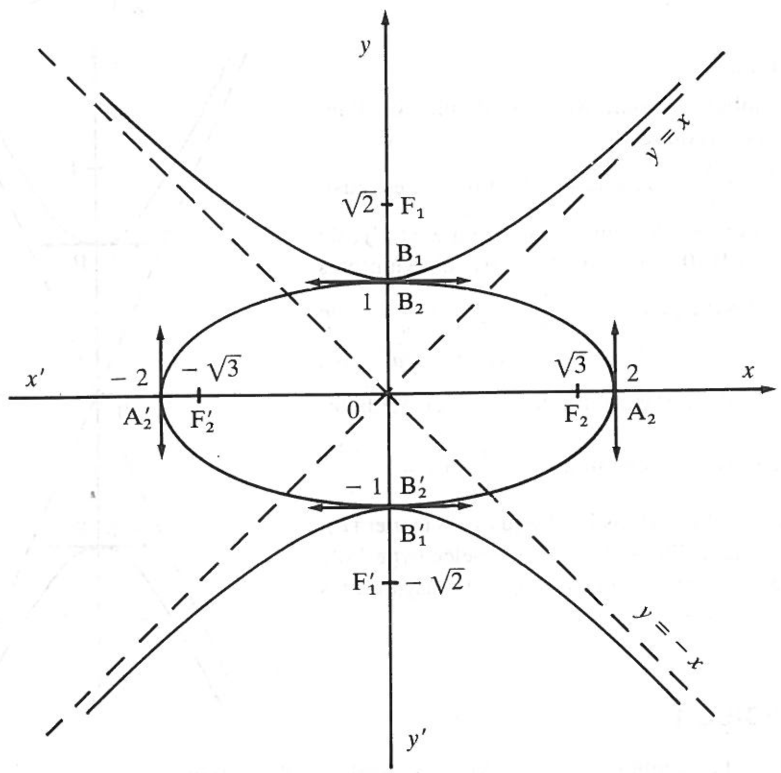
Solutions

1) Si n est pair alors on a : $(E_n) \Leftrightarrow \frac{x^2}{n^2} + y^2 = 1$; donc (C_n) est une ellipse de centre 0 et d'axe focal $x'x$.

Si n est impair alors on a : $(E_n) \Leftrightarrow y^2 - \frac{x^2}{n^2} = 1$; donc (C_n) est une hyperbole de centre 0 et d'axe focal $y'y$.

2) (C_1) a pour équation $(E_1) : y^2 - x^2 = 1$. Donc : (C_1) est une hyperbole équilatère de centre 0, d'axe focal $y'y$, de sommets $B_1 (0 , 1)$ et $B'_1 (0 , -1)$, de foyers $F_1 (0 , \sqrt{2})$ et $F'_1 (0 , -\sqrt{2})$, d'excentricité $e = \sqrt{2}$ et d'asymptotes les droites d'équations : $y = x$ et $y = -x$.

De même : (C_2) a pour équation $(E_2) : \frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$. Donc : (C_2) est une ellipse de centre 0, d'axe focal $x'x$, de sommets $A_2 (2 , 0)$, $A'_2 (-2 , 0)$, $B_2 (0 , 1)$ et $B'_2 (0 , -1)$, de foyers $F_2 (\sqrt{3} , 0)$ et $F'_2 (-\sqrt{3} , 0)$ et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



EXERCICE 2

Soit (C_n) l'ensemble des points $M (x , y)$ vérifiant l'équation :

$(E_n) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{n-4} = 1$ avec $n \in \mathbb{N} - \{4\}$.

1) Discuter, suivant les valeurs de n, la nature de l'ensemble (C_n).

2) Déterminer et construire dans un même repère orthonormé les ensembles (C_0), (C_8) et (C_{13}) en précisant leurs éléments caractéristiques (centre, axe focal, sommets, foyers, excentricité et asymptotes).

Solutions

1) Si $n \in \{0 , 1 , 2 , 3\}$ alors (C_n) est une hyperbole de centre 0 et d'axe focal $x'x$.

Si $n \in \{5 , 6 , 7\}$ alors (C_n) est une ellipse de centre 0 et d'axe focal $x'x$.

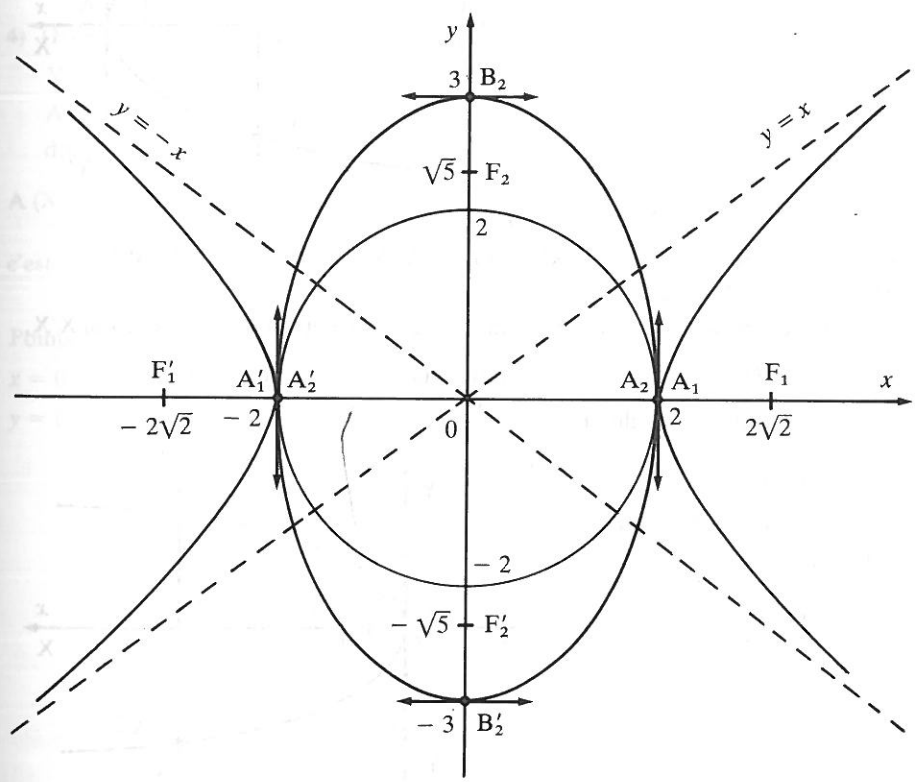
Si $n = 8$ alors (C_8) est un cercle de centre 0 et de rayon 2.

Si $n > 8$ alors (C_n) est une ellipse de centre 0 et d'axe focal $y'y$.

2) On a : $(E_0) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$. Donc : (C_0) est une hyperbole équilatère de centre 0, d'axe focal $x'x$, de sommets $A_1 (2 , 0)$ et $A'_1 (-2 , 0)$, de foyers $F_1 (2\sqrt{2} , 0)$ et $F'_1 (-2\sqrt{2} , 0)$, d'excentricité $e = \sqrt{2}$ et d'asymptotes $y = x$ et $y = -x$.

De même : On a : $(E_8) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$. Donc : ($C_8$ est un cercle de centre 0 et de rayon 2.

Enfin : On a : $(E_{13}))$: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Donc : (C_{13}) est une ellipse de centre 0, d'axe focal $y'y$, de sommets $A_2 (2 , 0)$, $A'_2 (-2 , 0)$, $B_2 (0 , 3)$ et $B'_2 (0 , -3)$, de foyers $F_2 (0 , \sqrt{5})$ et $F'_2 (0 , -\sqrt{5})$ et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



EXERCICE 3

Déterminer et construire l'ensemble des points M (x, y) vérifiant l'équation cartésienne :

1) (E) : $y^2 + x - 2 = 0$

2) (E) : $y^2 - x - 3 = 0$

3) (E) : $y^2 + 2y - x + 1 = 0$

4) (E) : $y^2 - 4y + 2x + 6 = 0$

5) (E) : $x^2 - 4x + 2y + 6 = 0$

Solutions

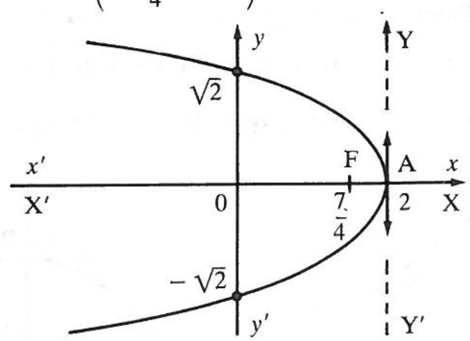
1) On a : (E) $\Leftrightarrow y^2 = -(x-2) \Leftrightarrow Y^2 = -X$ avec $Y = y$ et $X = x - 2$.

L'origine du nouveau repère (X'X , Y'Y) est : A $(X = 0, Y = 0)$ c'est-à-dire A $(x = 2, y = 0)$ l'ensemble des points M est donc une parabole de paramètre $p = -\frac{1}{2}$, d'axe focal X'X, de sommet A $(X = 0, Y = 0)$ c'est-à-dire A $(x = 2, y = 0)$, de foyer F $\left(X = \frac{p}{2}, Y = 0\right)$ c'est-à-dire F $\left(x = \frac{7}{4}, y = 0\right)$

Points particuliers :

$x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}$ ou $y = -\sqrt{2}$

$y = 0 \Rightarrow x = 2$



2) (E) $\Leftrightarrow y^2 = x + 3 \Rightarrow Y^2 = X$ avec $Y = y$ et $X = x + 3$.

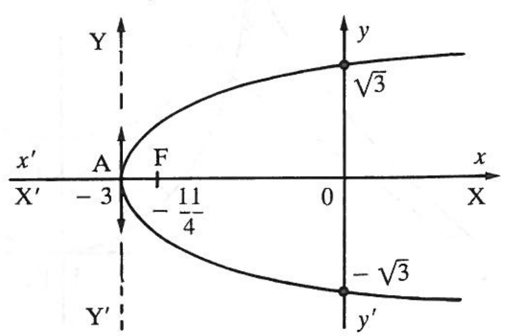
L'origine du nouveau repère (X'X , Y'Y) est A $(X = 0, Y = 0)$ c'est-à-dire A $(x = -3, y = 0)$.

L'ensemble des points M est donc une parabole de paramètre $p = \frac{1}{2}$, d'axe focal X'X, de sommet A $(X = 0, Y = 0)$ c'est-à-dire A $(x = -3, y = 0)$, de foyer F $\left(X = \frac{p}{2}, Y = 0\right)$ c'est-à-dire F $\left(x = -\frac{11}{4}, y = 0\right)$

Points particuliers :

$x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$

$y = 0 \Rightarrow x = -3$.

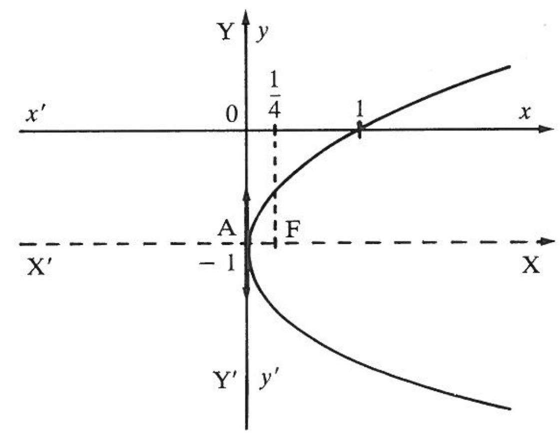


3) (E) $\Leftrightarrow (y+1)^2 - 1 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (y+1)^2 = x \Leftrightarrow Y^2 = X$ avec $Y = y + 1$ et $X = x$. L'origine du nouveau repère (X'X , Y'Y) est A $(X = 0, Y = 0)$ c'est-à-dire A $(x = 0, y = -1)$. L'ensemble des points M est donc une parabole de paramètre $p = \frac{1}{2}$, d'axe focal X'X, de sommet A $(X = 0, Y = 0)$ c'est-à-dire A $(x = 0, y = -1)$, de foyer F $\left(X = \frac{p}{2}, Y = 0\right)$ c'est-à-dire F $\left(x = \frac{1}{4}, y = -1\right)$

Points particuliers :

$x = 0 \Rightarrow y = -1$

$y = 0 \Rightarrow x = 1$.

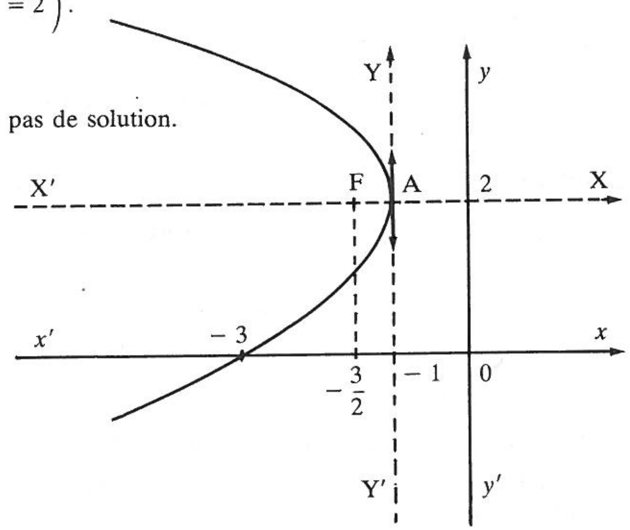


4) (E) $\Leftrightarrow (y-2)^2 - 4 + 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 = -2(x+1) \Leftrightarrow Y^2 = -2X$ avec $Y = y - 2$ et $X = x + 1$. L'origine du nouveau repère (X'X , Y'Y) est A $(X = 0, Y = 0)$ c'est-à-dire A $(x = -1, y = 2)$. L'ensemble des points M est donc une parabole de paramètre $p = -1$, d'axe focal X'X, de sommet A $(X = 0, Y = 0)$ c'est-à-dire A $(x = -1, y = 2)$, de foyer F $\left(X = \frac{p}{2}, Y = 0\right)$ c'est-à-dire F $\left(x = -\frac{3}{2}, y = 2\right)$.

Points particuliers :

$x = 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 6 = 0$ pas de solution.

$y = 0 \Rightarrow x = -3$.



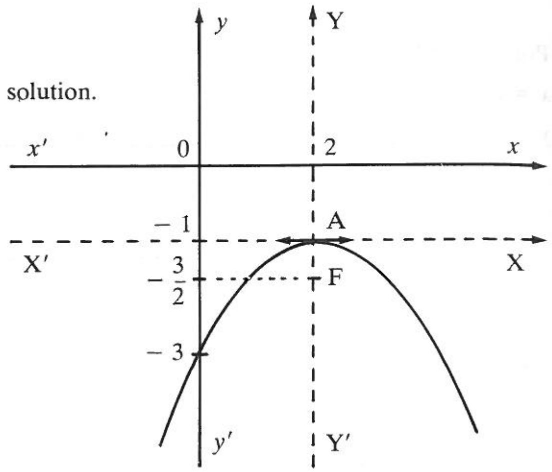
5) (E) $\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = -2(y+1) \Leftrightarrow X^2 = -2Y$ avec $X = x - 2$ et $Y = y + 1$. L'origine du nouveau repère (X'X , Y'Y) est A (X = 0 , Y = 0) c'est-à-dire A (x = 2 , y = − 1).

L'ensemble des points M est donc une parabole de paramètre $p = -1$, d'axe focal Y'Y (la droite d'équation $x = 2$), de sommet A (X = 0 , Y = 0) c'est-à-dire A ($x = 2$, $y = -1$), de foyer F$\left(X = 0 , Y = \frac{p}{2}\right)$ c'est-à-dire F$\left(x = 2 , y = -\frac{3}{2}\right)$.

Points particuliers :

$x = 0 \Rightarrow y = -3$.

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$ pas de solution.



EXERCICE 4

Soit $Z = |z|^2 - z^2 + 4iz + 4(z + \bar{z}) - 6$ avec $z \in \mathbb{C}$, $|z|$ son module et $\bar{z}$ son conjugué.

Soit M (x , y) l'image de z dans le plan complexe.

1) Déterminer l'ensemble des points M (x , y) tel que Z soit réel.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M (x , y) tel que Z soit imaginaire pur.

3) En déduire l'ensemble des points M (x , y) tel que l'on ait : $\operatorname{Arg} Z = \frac{\pi}{2}$.

4) Résoudre l'équation Z = 0 et préciser les images de ses solutions.

Solutions

Cherchons d'abord la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

On a : $Z = x^2 + y^2 - (x^2 - y^2 + 2ixy) + 4i(x + iy) + 8x - 6$

$= x^2 + y^2 - x^2 + y^2 - 2ixy + 4ix - 4y + 8x - 6$

$= (2y^2 - 4y + 8x - 6) + i\,2x(-y + 2)$

Donc : $\mathcal{R}(Z) = 2y^2 - 4y + 8x - 6$ et $\operatorname{Im}(Z) = 2x(-y + 2)$.

1) Z réel $\Leftrightarrow 2x(-y + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 2$.

L'ensemble des points M est donc l'axe $y'y$ et la droite d'équation $y = 2$ qui est parallèle à l'axe $x'x$.

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 4y + 8x - 6 = 0 \quad (E) \\ 2x(-y + 2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 2 \end{cases}$

On a : (E) $\Leftrightarrow 2(y^2 - 2y) + 8x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2(y-1)^2 - 2 + 8x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2(y-1)^2 = -8(x-1) \Leftrightarrow (y-1)^2 = -4(x-1) \Leftrightarrow Y^2 = -4X$

avec $Y = y - 1$ et $X = x - 1$. L'origine du nouveau repère (X'X , Y'Y) est W (X = 0 , Y = 0) c'est-à-dire : W ($x = 1$, $y = 1$).

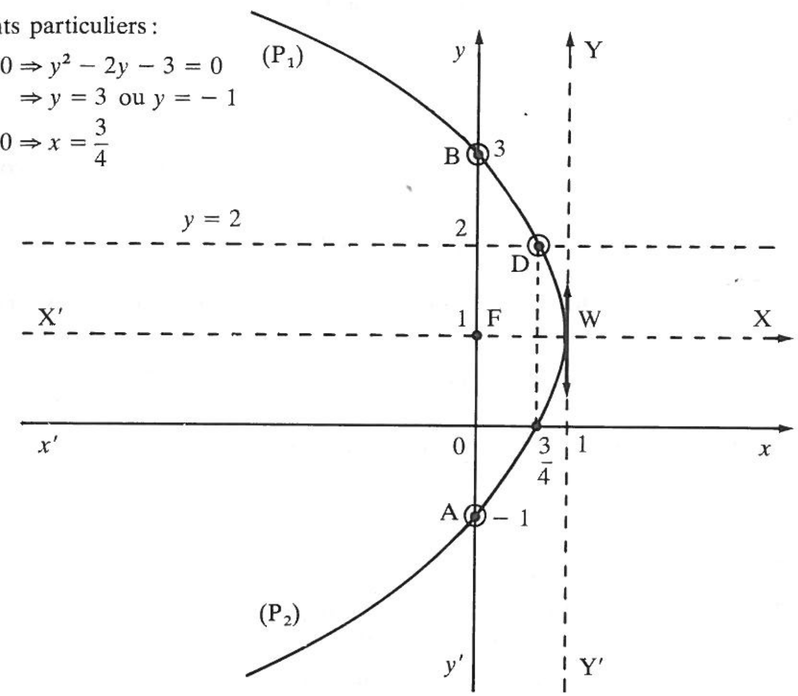
L'ensemble des points M est donc une parabole de paramètre $p = -2$, d'axe focal X'X, de sommet W (X = 0 , Y = 0) c'est-à-dire W ($x = 1$, $y = 1$), de foyer F$\left(X = \frac{p}{2} , Y = 0\right)$ c'est-à-dire F ($x = 0$, $y = 1$).

Points particuliers :

$x = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$

$\Rightarrow y = 3$ ou $y = -1$

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$



Les points A , B et D ne conviennent pas car $x \neq 0$ et $y \neq 2$.

3) $\operatorname{Arg} Z = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}(Z) = 0 \Leftrightarrow \text{M appartient à la parabole du 2).} \\ \operatorname{Im}(Z) > 0 \Leftrightarrow x(-y + 2) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ et } -y + 2 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } y < 2 \\ \text{ou} : x < 0 \text{ et } -y + 2 < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ et } y > 2 \end{cases}$

Donc : $\operatorname{Arg} Z = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \overset{\frown}{AWD} \text{ de la parabole du 2)} \\ \text{ou} : M \in \overset{\frown}{P_1B} \text{ de la parabole du 2).} \end{cases}$

Conclusion : L'ensemble des points M est formé par les arcs $\overset{\frown}{AWD}$ et $\overset{\frown}{P_1B}$ de la parabole du 2) privés des points A , D et B.

4) $Z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathscr{R}(Z) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 4x - 3 = 0 \quad (H). \\ I_m(Z) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 2 \end{cases}$

Si $x = 0$ alors on a : (H) $\Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3$ ou $y = -1$.

Si $y = 2$ alors on a : (H) $\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

Donc : l'équation $Z = 0$ admet 3 solutions :

$z_1 = 3i$; $z_2 = -i$; $z_3 = \frac{3}{4} + 2i$

Leurs images sont respectivement :

B (0 , 3) , A (0 , − 1) et D $\left(\frac{3}{4}, 2\right)$ (voir schéma du 2)).

EXERCICE 5

Soit $Z = 13\,|z|^2 - 5z^2 + 8(z + \bar{z}) - 64$ avec $z \in \mathbb{C}$, $|z|$ son module et $\bar{z}$ son conjugué. Soit M (x, y) l'image de z dans le plan complexe.

1) Déterminer l'ensemble des points M (x, y) tel que Z soit réel.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M (x, y) tel que Z soit imaginaire pur.

3) En déduire l'ensemble des points M (x, y) tel que : $\operatorname{Arg} Z = -\frac{\pi}{2}$.

4) Résoudre l'équation $Z = 0$ et préciser les images de ses solutions.

Solutions

On a : $Z = 13(x^2 + y^2) - 5(x^2 - y^2 + 2ixy) + 16x - 64$
$= (8x^2 + 18y^2 + 16x - 64) + i(-10xy)$.

1) Z réel $\Leftrightarrow -10xy = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.
L'ensemble des points M est donc formé par les axes $x'x$ et $y'y$.

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 + 18y^2 + 16x - 64 = 0 \quad (E) \\ -10xy \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 0. \end{cases}$

On a : (E) $\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 + 8x - 32 = 0$

$\Leftrightarrow 4(x^2 + 2x) + 9y^2 - 32 = 0$

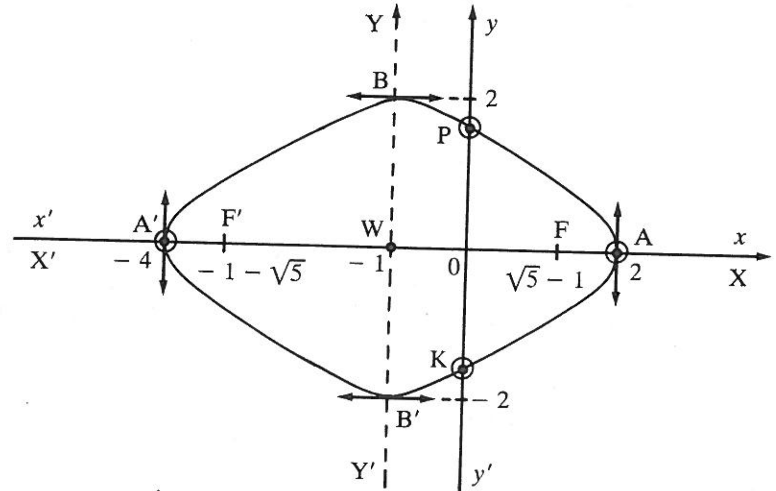
$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 - 4 + 9y^2 - 32 = 0$

$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$ avec $X = x + 1$ et $Y = y$.

L'origine du nouveau repère (X'X , Y'Y) est W (X = 0 , Y = 0) c'est-à-dire W($x = -1$, $y = 0$). L'ensemble des points M est donc une ellipse de centre W (X = 0 , Y = 0) c'est-à-dire W ($x = -1$, $y = 0$), d'axe focal X'X, de sommets :

A (X = 3 , Y = 0), A' (X = − 3 , Y = 0), B (X = 0 , Y = 2) et B' (X = 0 , Y = − 2) c'est-à-dire : A ($x = 2$, $y = 0$), A' ($x = -4$, $y = 0$), B ($x = -1$, $y = 2$) et B' ($x = -1$, $y = -2$), de foyers F ($X = \sqrt{5}$, Y = 0) et F' ($X = -\sqrt{5}$, Y = 0) c'est-à-dire encore F ($x = \sqrt{5} - 1$, $y = 0$) et F' ($x = -1 - \sqrt{5}$, $y = 0$).
Mais : $x \neq 0$ et $y \neq 0$
Donc : les points A , A' , P , K ne conviennent pas.



3) $\operatorname{Arg} Z = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 + 18y^2 + 16x - 64 = 0 \\ -10xy < 0 \Leftrightarrow xy > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{M appartient à l'ellipse du 2)} \\ (x > 0 \text{ et } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } y < 0). \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ M $\in \widehat{AP}$ ou M $\in \widehat{A'B'K}$ de l'ellipse du 2).

L'ensemble des points M est donc formé par les arcs $\widehat{AP}$ et $\widehat{A'B'K}$ de l'ellipse du 2) privés des points A , P , A' et K.

4) $Z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 + 18y^2 + 16x - 64 = 0 \text{ (E)} \\ -10xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0. \end{cases}$

Si $x = 0$ alors on a : (E) $\Leftrightarrow 9y^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}\sqrt{2}$ ou $y = -\frac{4}{3}\sqrt{2}$.
Si $y = 0$ alors on a : (E) $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -4$.
L'équation $Z = 0$ admet donc 4 solutions :
$z_1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\,i$; $z_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{2}\,i$; $z_3 = 2$; $z_4 = -4$.
Leurs images sont respectivement : P , K , A et A' (voir schéma du 2)).

EXERCICE 6

Soit $Z = 3z^2 + 5\,|z|^2 - 8(z + \bar{z}) - 24$ avec $z \in \mathbb{C}$. Soit M (x, y) l'image de z dans le plan complexe.

1) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit réel.
2) Déterminer et construire l'ensemble des points M tel que Z soit imaginaire pur.
3) En déduire l'ensemble des points M tel que : $\operatorname{Arg} Z = -\frac{\pi}{2}$
4) Résoudre l'équation $Z = 0$ et préciser les images de ses solutions.

Solutions

$Z = 3\,(x^2 - y^2 + 2ixy) + 5\,(x^2 + y^2) - 16x - 24$
$\quad = (8x^2 + 2y^2 - 16x - 24) + i\,(6xy).$

1) Z réel $\Leftrightarrow 6xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

L'ensemble des points M est donc formé par les axes $x'x$ et $y'y$.

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 + 2y^2 - 16x - 24 = 0 \text{ (E)} \\ 6xy \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \end{cases}$

On a : (E) $\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 - 8x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 4\,(x^2 - 2x) + y^2 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 4\,(x - 1)^2 - 4 + y^2 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 4\,(x - 1)^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{X^2}{2^2} + \dfrac{Y^2}{4^2} = 1$ avec $X = x - 1$ et $Y = y$.

L'origine du nouveau repère (X'X , Y'Y) est W (X = 0 , Y = 0) c'est-à-dire W ($x = 1$, $y = 0$). L'ensemble des points M est donc une ellipse de centre W (X = 0 , Y = 0) c'est-à-dire W ($x = 1$, $y = 0$), d'axe focal Y'Y, de sommets : A (X = 2 , Y = 0) , A' (X = − 2 , Y = 0), B (X = 0 , Y = 4) et B' (X = 0 , Y = − 4) c'est-à-dire : A ($x = 3$, $y = 0$), A' ($x = -1$, $y = 0$) , B ($x = 1$, $y = 4$) et B' ($x = 1$, $y = -4$) ; de foyers F (X = 0 , Y = $2\sqrt{3}$) et F' (X = 0 , Y = $-2\sqrt{3}$) c'est-à-dire F ($x = 1$, $y = 2\sqrt{3}$) et F' ($x = 1$, $y = -2\sqrt{3}$)

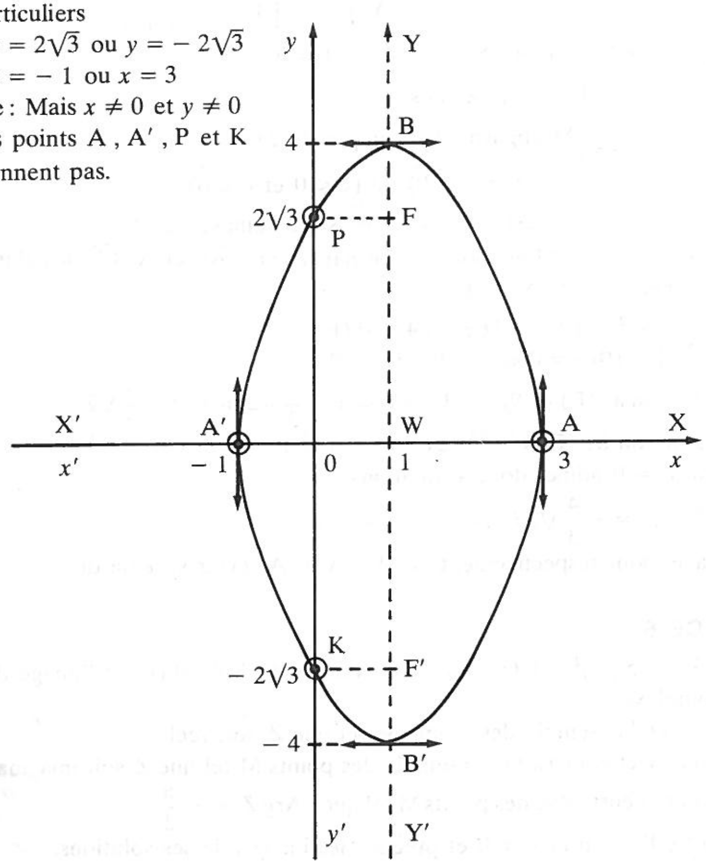
Points particuliers

$x = 0 \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$ ou $y = -2\sqrt{3}$

$y = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 3$

Remarque : Mais $x \neq 0$ et $y \neq 0$

Donc : les points A , A' , P et K ne conviennent pas.



3) $\operatorname{Arg} Z = -\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 + 2y^2 - 16x - 24 = 0 \\ 6xy < 0 \Leftrightarrow xy < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{M appartient à l'ellipse du 2)} \\ x \text{ et } y \text{ de signes contraires} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ M $\in \widehat{A'P}$ ou M $\in \widehat{KB'A}$ de l'ellipse du 2).

L'ensemble des points M est donc formé par les arcs $\widehat{A'P}$ et $\widehat{KB'A}$ de l'ellipse du 2), privés des points A' , P , K et A.

4) $Z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 + 2y^2 - 16x - 24 = 0 \text{ (H)} \\ 6xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$

Si $x = 0$ alors on a : (H) $\Leftrightarrow 2y^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{3}$ ou $y = -2\sqrt{3}$

Si $y = 0$ alors on a : (H) $\Leftrightarrow 8x^2 - 16x - 24 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$

L'équation Z = 0 admet donc 4 solutions :

$z_1 = i\,2\sqrt{3}$; $z_2 = -i\,2\sqrt{3}$; $z_3 = -1$; $z_4 = 3$.

Leurs images sont respectivement : P , K , A' et A (voir schéma du 2)).

EXERCICE 7

Soit $Z = z - 2\,(\bar{z})^2$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $\bar{z}$ son conjugué. Soit M (x , y) l'image de z dans le plan complexe.

1) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit réel.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M tel que Z soit imaginaire pur.

3) En déduire l'ensemble des points M tel que : $\operatorname{Arg} Z = -\dfrac{\pi}{2}$.

4) Résoudre l'équation Z = 0 et préciser les images de ses solutions.

Solutions

$Z = x + iy - 2(x - iy)^2 = x + iy - 2(x^2 - y^2 - 2ixy)$
$\quad = (-2x^2 + 2y^2 + x) + iy\,(1 + 4x)$

1) Z réel $\Leftrightarrow y(1 + 4x) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -\dfrac{1}{4}$

L'ensemble des points M est donc formé par l'axe $x'x$ et la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{4}$.

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 2y^2 + x = 0 \text{ (H)} \\ y(1 + 4x) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0 \text{ et } x \neq -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

On a : (H) $\Leftrightarrow -2\left(x^2 - \dfrac{x}{2}\right) + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow -2\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{8} + 2y^2 = 0$

$\Leftrightarrow -2\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + 2y^2 = -\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{X^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \dfrac{Y^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1$ avec $X = x - \dfrac{1}{4}$ et $Y = y$

L'origine du nouveau repère (X'X , Y'Y) est W(X = 0 , Y = 0) c'est-à-dire $W\left(x = \frac{1}{4}, y = 0\right)$. L'ensemble des points M est donc une hyperbole de centre

W(X = 0 , Y = 0) c'est-à-dire $W\left(x = \frac{1}{4}, y = 0\right)$, d'axe focal X'X , de sommets

$A\left(X = \frac{1}{4}, Y = 0\right)$ et $A'\left(X = -\frac{1}{4}, Y = 0\right)$ c'est-à-dire $A\left(x = \frac{1}{2}, y = 0\right)$

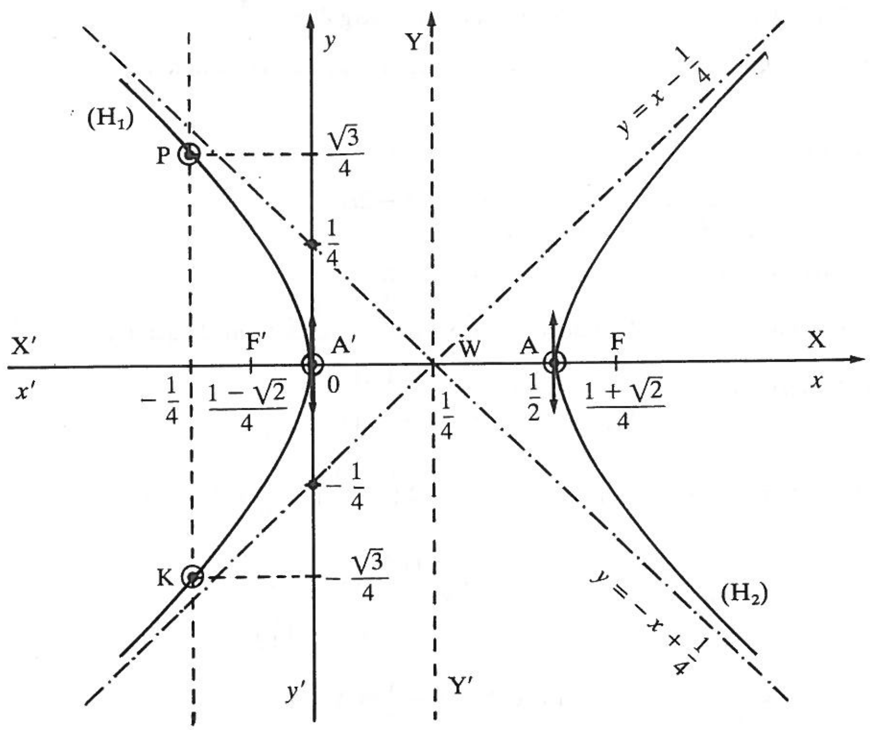
et A' $(x = 0 , y = 0)$, de foyers $F\left(X = \frac{\sqrt{2}}{4}, Y = 0\right)$ et $F'\left(X = -\frac{\sqrt{2}}{4}, Y = 0\right)$

c'est-à-dire : $F\left(x = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}, y = 0\right)$ et $F'\left(x = \frac{1 - \sqrt{2}}{4}, y = 0\right)$

et d'asymptotes les droites d'équations : Y = X et Y = − X c'est-à-dire :

$y = x - \frac{1}{4}$ et $y = -x + \frac{1}{4}$.

Mais $y \neq$ et $x \neq \frac{1}{4}$. Donc : les points A , A' , P et K ne conviennent pas.



3) $\operatorname{Arg} Z = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 2y^2 + x = 0 \\ y(1 + 4x) < 0 \Leftrightarrow (y > 0 \text{ et } 1 + 4x < 0) \text{ ou } (y < 0 \text{ et } 1 + 4x > 0) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{M appartient à l'hyperbole du 2)} \\ \left(y > 0 \text{ et } x < -\frac{1}{4}\right) \text{ ou } \left(y < 0 \text{ et } x > -\frac{1}{4}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow M \in \widehat{PH_1}$ ou $M \in \widehat{KA'}$ ou $M \in \widehat{AH_2}$ de l'hyperbole du 2).

L'ensemble des points M est donc formé par les parties $\widehat{PH_1}$, $\widehat{KA'}$ et $\widehat{AH_2}$ de l'hyperbole du 2), privées des points P , K , A' et A.

4) $Z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 2y^2 + x = 0 \text{ (H)} \\ y(1 + 4x) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{4}. \end{cases}$

Si $y = 0$ alors on a : (H) $\Leftrightarrow -2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

Si $x = -\frac{1}{4}$ alors on a : (H) $\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{16} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ou $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

L'équation Z = 0 admet donc 4 solutions :

$z_1 = 0$; $z_2 = \frac{1}{2}$; $z_3 = -\frac{1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}}{4}$; $z_4 = -\frac{1}{4} - i\,\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Leurs images sont respectivement : A' , A , P et K (voir schéma du 2)).

EXERCICE 8

Soit $Z = 2z^2 + i\,\bar{z}$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $\bar{z}$ sont conjugué. Soit M(x , y) l'image de z dans le plan complexe.

1) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit réel.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M tel que Z soit imaginaire pur.

3) En déduire l'ensemble des points M tel que : $\operatorname{Arg} Z = \frac{\pi}{2}$.

Solutions

On a : $Z = 2(x^2 - y^2 + 2ixy) + i\,(x - iy)$
$= 2x^2 - 2y^2 + 4ixy + ix + y$
$= (2x^2 - 2y^2 + y) + ix\,(4y + 1)$.

1) Z réel $\Leftrightarrow x(4y + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = -\frac{1}{4}$.

L'ensemble des points M(x , y) est formé donc par l'axe $y'y$ et la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}$.

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2y^2 + y = 0 \text{ (H).} \\ x(4y + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq -\frac{1}{4}. \end{cases}$

On a : (H) $\Leftrightarrow 2x^2 - 2\left(y^2 - \frac{y}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\left(y - \frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1.$

$\Leftrightarrow \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{X^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1$ avec $Y = y - \frac{1}{4}$ et $X = x$.